르벡적분

잴 수 있는 집합과 측도

열린 집합 U \mathbb{R}의 한 점 x \in U 를 고정하고 a\_{x} = inf{a\in \mathbb{R} : (a,x) \subseteq U } , b\_{x} = sup{b\in \mathbb{R} : (a,b) \subseteq U } 라 정의한다. I\_{x} = (a\_{x} , b\_{x}) 라 두자. U = \bigcup\_{x \in U} I\_{x} 는 서로소인 열린 구간들의 합집합이다.

(명제 1.1.1) 실수의 부분집합 U \subseteq \mathbb{R} 가 열린 집합이라면, U는 셀 수 있는 서로소인 열린 구간의 합집합으로 표시된다. 또한 이 표시방법은 한 가지 뿐이다.

열린 집합 U \mathbb{R} 가 서로소인 열린 구간의 합집합 \sqcup\_{n}(a\_{n} b\_{n}) 으로 표시되었을 때 그 길이 \lambda(U) 를 \lambda(U) = \sum\_{n = 1}^{\infty} (b\_{n} – a\_{n}) 으로 정의한다.

임의의 집합 S \subset \mathbb{R} 에 대하여 그 길이 \mu(S) 를 \mu(S) = inf{\lambda(U) : U \supseteq S, U는 열린 집합} 으로 정의한다.

집합 S \subset \mathbb{R}과 점 x \in \mathbb{R} 에 대하여 x + S = {x + y \in \mathbb{R} : y \in S} 로 정의하고 이를 집합 S 의 평행이동이라 부른다.

(명제 1.1.2) 함수 \mu : \mathcal{P}(R) \to [0,\infty] 는 다음 성질을 가진다.

만일 S \subseteq T 이면 \mu(S) \le \mu(T) 이다.

만일 I 가 a, b를 양끝점으로 하는 구간이면 \mu(I) = |b – a| 이다.

임의의 x \in \mathbb{R} 와 S \ini \mathcal{R} 에 대하여 \mu(x + S) = \mu(S)이다.

임의의 셀 수 있는 집합 모임 {S\_{n} : n = 1,2,…} 에 대하여 \mu \biggl( \bigcup\_{n = 1}^{\infty} S\_{n} \biggr) \le \sum\_{n=1}^{\infty} \mu(S\_{n}) 이 성립한다.

집합 E \subseteq \mathbb{R}이 다음 조건 A \subseteq \mathbb{R} \implies \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^{c}) 를 만족하면 E를 잴 수 있는 집합이라 부르고, 잴 수 있는 집합 전체의 모임을 \mathfrak{M} 이라 쓴다.. 잴 수 있는 집합의 조건은 카라테오도리 조건이라 불린다.

(정리 1.1.3) 집합 모임 \mathfrak{M}은 다음 성질을 가진다.

\empty \subset \mathfrak{M}

만일 E \in \mathfrak{M} 이면 E^{c} \in \mathfrak{M} 이다.

만일 E, F \in \mathfrak{M} 이면 E \cup F \in \mathfrak{M} 이다.

각 n = 1,2, … 에 대하여 E\_{n} \in \mathfrak{M} 이면 \bigcup\_{n} E\_[n] \in \mathfrak{M} 이다.

만일 \mu€ = 0 이면 E \in \mathfrak{M} 이다.

집합 I 가 구간이면 I \in \mathfrak{M} 이다.

집합 S가 열린 집합이면 S \in \mathfrak{M} 이다.

(정리 1.1.4) 각 n \ 1,2, … 에 대하여 E\_{n} \in \mathfrak{M} 이고 집합모임 {E\_{n}} 이 서로소이면 등식 \mu \biggl( \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \sum\_{n=1}^{\infty} \mu(E\_{n}) 이 성립한다.

(따름정리 1.1.5) 잴 수 있는 단순증가 집합열 <E\_{n}> 에 대하여 등식 \mu \biggl( \bigcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(E\_{n}) 이 성립한다. 또한 잴 수 있는 단순감소 집합열 <F\_{n}> 에 대하여 \mu(F\_{1}) < \infty 이면 등식 \mu \biggl( \bigcap\_{n = 1}^{\infty} F\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(F\_{n}) 이 성립한다.

열린 집합들의 셀 수 있는 교집합으로 표시되는 집합을 G\_{delta} -집합 이라 하고, 닫힌 집합들의 셀 수 있는 합집합으로 표시되는 집합을 F\_{delta} -집합이라 부른다. 이 두 부류의 집합들은 잴 수 있다.

(명제 1.1.6) 집합 E \subset \mathbb{R} 에 대하여 다음이 동치이다.

E가 잴 수 있는 집합이다.

임의의 양수 \epsilon > 0 에 대하여 F \subset E \subset U, \mu(U \setminus F) < \epsilon 인 열린 집합 U 와 닫힌 집합 F 가 존재한다.

B \subset E \subset A , \mu(A \setminus B) = 0 를 만족하는 G\_{delta}= 집합 A 와 F\_{delta} -집합 B 가 존재한다.

(따름정리 1.1.7) 임의의 잴 수 있는 집합 E \subset \mathbb{R} 에 대하여 등식 \mu(E) = \sup{\mu(K) : K \subset E, K 는 닫힌 유계집합}

(정의) 우선 구간 I = [0,1] 을 삼등분하여 가운데 열린구간 J\_{1} 를 들어내고, 즉 C\_{1} = I \setminus J\_{1} 이라 두고 C\_{1}의 두 구간에 대하여도 똑 같은 일을 되풀이한다. C\_{2} 의 네 구간에 대하여도 똑 같은 일을 되풀이한다. 이렇게 하여 얻은 닫힌 집합열 \langle C\_{n} \rangle 들의 교집합을 C = \bigcup C\_{n} 이라 두고 이를 칸토르 집합이라 한다.

함수 \mu : \mathcal{P} (\mathbb{R}) \to [0,\infty] 를 \mathfrak{M} 에 제한했을 때 이를 m : \mathfrak{M} \to [0,\infty] 이라 쓰자.

임의의 집합 X의 멱집합의 부분집합 \mathfrak{S} 가 (정리 1.1.3) 의 첫 번쨰 조건부터 네 번째 조건까지를 만족하면, 이를 \sigma – 대수라 부른다.

X의 \sigma – 대수가 주어지고 함수 \mu : \mathfrak{S} \to [0,\infty] 가 조건 \mu \biggl( \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(E\_{n}) 를 만족하면, (\mathfrak{S}, \mu) 를 X의 측도라 하고, \mathfrak{S} 의 원들을 잴 수 있는 집합이라 부른다.

따라서 (\mathfrak{M},m) 은 \mathbb{R}의 측도인데, 이를 르벡 측도라 한다.

집합 X의 한 점 x \in X를 고정하고, 임의의 집합 A \subset X 에 대하여 \delta\_{x}(A) = \begin{cases}1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} 라 정의하면 (\mathcal{P}(X) , \delta\_{x}) 는 X의 측도가 되는데, 이렇게 정의된 측도를 디락 측도라 부른다.

(subsection 1.2)잴 수 있는 함수와 적분

(정의) 확장실수체 \mathbb{R}^{\*} = \mathbb{R} \cup {\mp \infty}

(정의) 잴 수 있는 집합 E \subseteq \mathbb{R} 에서 정의된 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 이 다음 조건 a\in \mathbb{R} \implies {x \in E : f(x) > a} \in \mathfrak{M} 을 만족하면 이를 잴 수 있는 함수라 한다.

(정의) 집합 A \subseteq \mathbb{R} 에 대하여, 그 특성함수 \chi\_{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 를 \chi\_{A}(x) = \begin{cases}1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} 라 정의하자.

그러면 집합 A가 잴 수 있을 필요충분조건은 \chi\_{A} 가 잴 수 있는 함수임이다.

(명제 1.2.1) 잴 수 있는 집합 E 에서 정의된 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 다음은 동치이다.

함수 f는 잴 수 있는 함수이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \ge a} \in \mathfrak{M} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) < a} \in \mathfrak{M} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \le a} \in \mathfrak{M} 이다.

(따름정리 1.2.2) 함수 f: E \to \mathbb{R}^{\*} 이 잴 수 있으면, 임의의 a \in \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 집합 {x \in E : f(x) = a} 는 잴 수 있다.

(명제 1.2.3) 잴 수 있는 집합 E 에서 \mathbb{R}^{\*} 로 가는 함수들에 대하여 다음이 성립한다.

연속함수 f : E \to \mathbb{R} 은 잴 수 있다.

만일 f, g가 잴 수 있고 \alpha \in \mathbb{R} 이면 f + g, fg, \alpha f 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 f\_{n} 이 잴 수 있으면 함수 x \mapsto \inf\_{n} f\_{n} (x) 와 x \mapsto \sup\_{n}f\_{n}(x) 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 함수 f\_{n} 이 잴 수 있으면 점별극한함수 \limsup\_{n} f\_{n} , \liminf\_{n} f\_{n}, \lim\_{n} f\_{n} 도 잴 수 있다.

함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 이 잴 수 있고, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 이 연속이면 그 합성함수 g \bullet f 도 잴 수 있다. 여기서, f(x) = \mp \infty 인 x \in E 에 대해서는 (g \bullet f) (x) = \mp \infty 로 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{R} 의 치역이 유한집합이면, 이를 단순함수라 한다.

치역이 {c\_{1}, …, c\_{n}} 인 단순함수 s : E \to \mathbb{R} 가 있을 때, 각 i = 1,2,…, n 에 대하여 E\_{i} = { x \in E : s(x) = c\_{i}} 라 두면 {E\_{i}} 는 서로소이고 s 는 s = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} \chi\_{E\_{i}} 같이 잴 수 있는 특성함수들의 선형결합으로 표시할 수 있다.

(정의) 정의된 단순함수가 s \ge 0 일때, 그 적분을 \int\_{E} s = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} m(E\_{i}) 라 정의한다.

\int\_{E} (s+t) = \int\_{E} s + \int\_{E} t

\int\_{E} (cs) = c\int\_{E} s

s \le t \implies \int\_{E} s \le \int\_{E} t

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0, +\infty] 의 적분을 \infty\_{E} f = sup{\infty\_{E} s : 0 \le s \le f, s 는 단순함수} 로 정의한다.

0 \le g \le f \implies 0 \le \int g \le \int f

(정리 1.2.4) 임의의 잴 수 있는 함수 f : E \to [0,\infty] 는 단조증가하는 단순함수의 점별극한함수로 표시된다.

(따름정리 1.2.5) 임의의 잴 수 있는 함수 f : E \to [0, +\infty] 는, 적절한 양수열 \left \langle c\_{n} \right \rangle 과 잴 수 있는 집합열 \left \langle E\_{n} \right \rangle 에 대하여 f = \sum\_{n = 1}^{\infty} c\_{n} \chi\_{E\_{i}} 로 표시된다.

(정의) 함수 f : X \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 f\_{+} (x) = max{f(x),0}, f\_{-} (x) = - min{f(x),0}, x \in X 라 두면 f\_{+}, f\_{-} \ge 0 이고 f = f\_{+} – f\_{-} 이다. 만일 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 가 잴 수 있으면 (명제 1.2.3)에 의하여 f\_{+} 와 f\_{-} 도 잴 수 있다.

(정의) 함수 f 의 적분을 \int\_{E} f = \int\_{E} f\_{+} - \int\_{E} f\_{-} 라 정의한다. 만일 함수 f\_{+} 와 함수 f\_{-} 의 적분값이 모두 무한이면 f의 적분을 정의하지 않는다.

(정의) 함수 f\_{+}와 f\_{-} 의 적분값이 모두 유한일 때, 함수 f 를 르벡적분 가능한 함수 혹은 L^{1}-함수라 부른다. 또한, 잴수 있는 집합 E 위에서 정의된 르벡적분 가능한 함수 전체의 집합을 L^{1} (E) 라 쓴다.

만일 f \le g 이면 \iint\_{E} f \le \int\_{E} g 이다.

만일 m(E) = 0 이면, 임의의 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 가 잴 수 있고 \int\_{E} f = 0 이다.

(정리 1.2.6) 서로소인 잴 수 있는 집합 모임 {A\_{n} : n = 1,2, …} 에 대하여 A = \sqcup\_{n = 1}^{\infty} A\_{n} 이라 하자. 그러면 임의의 잴 수 있는 함수 f : A \to [0,\infty] 에 대하여 등식 \infty\_{A} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{A\_{n}} f 이 성립한다.

(따름정리 1.2.7) 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 f \in L^{1} (E) 일 필요충분조건은 |f| \in L^{1} (E) 이고 이 때 부등식 |\int\_{E} f| \le \int\_{E} |f| 이 성립한다.

(정의) 잴 수 있는 집합 E 의 각 점 x \in E 에 관한 명제 P(x) 가 있을 때, m({x \in E : P(x) 가 성립하지 않는다}) = 0 이면 거의 모든 점에서 P(x) 가 성립한다고 한다.

(명제 1.2.8) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0,\infty] 의 적분값이 유한이면 f는 거의 모든 점에서 유한값을 가진다.

(정의) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 복소함수 f : E \to \mathbb{C} 에 대해 함수 f = u + iv 의 실수부를 u, 허수부를 v라 하자. u와 v가 잴 수 있으면 f가 잴 수 있다고 한다.

만일 \int\_{E} |f| 가 유한값이면 f를 르벡적분가능함수라 부른다.

(정의) 복소함수의 적분을 \int\_{E} (u + iv) = \int\_{E} u + i \int\_{E} v 라 정의한다. 앞으로 L^{1}(E) 는 E에서 \mathbb{C} 로 가는 르벡적분가능함수 전체의 집합을 나타낸다.

L^{1}(E) 는 벡터공간이다.

\int\_{E} (\alpha f) = \alpha \int\_{E} f f \in L^{1}(E), \alpha \in \mathbb{C}

|\int\_{E} f| \le \int\_{E} |f|

(따름정리 1.2.9) 서로소인 잴 수 있는 집합모임 {A\_{n} : n = 1,2,…} 에 대하여 A = \sqcup\_{n = 1}^{\infty} A\_{n} 이라 하자. 그러면 임의의 f \in L^{1}(A) 에 대하여 \infty\_{A} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{A\_{n}} f 이 성립한다.

(명제 1.2.10) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f \ge 0 이고 \inf\_{E} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

만일 f \in L^{1} (E) 이고 임의의 잴 수 있는 집합 D \subset E 에 대하여 \int\_{D} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0이다.

(명제 1.2.11) 구간 [a,b] 위에서 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 가 잴 수 있고, 모든 점 x 에 대하여 등식 \int\_{[a,x]} f = 0 이 성립하면, 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

(subsection 1.3) 적분의 수렴정리

(단조수렴정리)(정리 1.3.1) 잴 수 있는 집합 E에서 \mathbb{R}^{\*} 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 이 다음 조건 0 \le f\_{n} \le f\_{n+1}, n = 1, 2, … 을 만족한다고 하자. 만일 각 x \in E 에 대하여 f(x) = lim\_{n} f\_{n}(x) 이면, \inf\_{E} f = \lim\_{n \to \infty} \int\_{E} f\_{n} 이 성립한다.

(정리 1.3.2) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 잴 수 있는 함수 f, g 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f, g \in L^{1}(E) 이면 f + g \in L^{1} (E) 이다. 또한 f, g \ge 0 이거나 f, g \in L^{1} (E) 이면 등식 \int\_{E} (f + g) = \int\_{E} f + \int\_{E} g 이 성립한다.

만일 f \in L^{1}(E) 이고 \alpha \in \mathbb{C} 이면, \alpha f \in L^{1} (E) 이고 등식 \int\_{E} (\alpha f) = \alpha \int\_{E} f 이 성립한다.

(따름정리 1.3.3) 잴 수 있는 집합 E에서 [0,\infty] 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여 f(x) = \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 라 정의하면, 등식 \int\_{E} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} f\_{n} 이 성립한다.

(파투) (정리 1.3.4) 잴 수 있는 집합 E에서 [0, + \infty] 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여, 부등식 \int\_{E} (\liminf\_{n \to \infty} f\_{n}) \le \liminf\_{n \to \infty} \int\_{E} f\_{n} 이 성립한다.

(르벡 수렴정리)(정리 1.3.5) 잴 수 있는 집합 E 에서 \mathbb{C} 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 이 다음 조건을 만족한다고 하자.

각 n = 1,2, … 에 대하여 |f\_{n}| \le g 인 g \in L^{1}(E) 가 존재한다.

각 x \in E 에 대하여 극한값 \lim\_{n} f\_{n}(x) 가 존재한다.

이 때, f(x) = lim\_{n} f\_{n}(x) 라 두면, f \in L^{1}(E) 이고 등식 \lim\_{n \to \infty} \int\_{E} |f\_{n} – f| = 0, \lim\_{n \to \infty} \int\_{E} f\_{n} = \int\_{E} f 이 성립한다.

(레비)(정리 1.3.6) 잴 수 있는 집합 E 에서 \mathbb{C} 로 가는 L^{1}-함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여 \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} |f\_{n}| < \infty 이라 가정하자. 그러면 거의 모든 x \in E 에 대하여 급수 \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 가 절대수렴한다. 또한, 그 극한값을 f(x) = \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 라 두면 f \in L^{1}(E) 이고 그 적분값은 \int\_{E} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} f\_{n} 로 주어진다.

(명제 1.3.7) 열린구간 I, J 의 곱집합 I \times J 위에서 정의된 이변수함수 f : I \times J \to \mathbb{C} 가 주어져있다. 각 x \in I 에 대하여 일변수함수 y \mapsto f(x,y) 가 잴 수 있는 함수이고, I \times J 위에서 편도함수 D\_{1}f 가 존재한다고 하자. 만일 조건 |D\_{1}f(x,y)| \le g(y), x \in I 를 만족하는 적분가능함수 g \in L^{1}(J) 가 존재하면 등식 \frac{d}{dx} \int\_{J} f(x,y) dy = \int\_{J} D\_{1}f(x,y)dy 이 성립한다.

(명제) 세 조건을 만족하는 함수 \mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty] 는 존재하지 않는다.

만일 I 가 a, b를 양끝점으로 하는 구간이면 \mu(I) = |b – a| 이다.

임의의 x \in \mathbb{R} 와 S \ini \mathcal{R} 에 대하여 \mu(x + S) = \mu(S)이다.

\biggl( \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(E\_{n})

(명제 1.3.6) 집합 E \subset \mathbb{R} 의 모든 부분집합이 잴 수 있으면 \mu(E) = 0 이다.

(subsection 1.4) 리만적분과 르벡적분

(정의) 유계함수 f : [a,b] \to [0, \infty] 와 분할 P = {x\_{0}(=a) , x\_{1}, …, x\_{n} (=b)} 및 i = 1,2, …, n 에 대하여 M\_{i} = \sup{f(x) : x\_{i-1} \le x \le x\_{i}}, m\_{i} = \inf{f(x) : x\_{i-1} \le x \le x\_{i}} 라 두고, 두 단순함수 U\_{p} 와 L\_{p} 를 U\_{p} = f(a)\_{ \chi\_{{a}}} + \sum\_{i = 1}^{n} M\_{i\chi\_{(x\_{i-1}, x\_{i}\rbrack}}, L\_{p} = f(a)\_{ \chi\_{{a}}} + \sum\_{i = 1}^{n} m\_{i\chi\_{(x\_{i-1}, x\_{i}\rbrack}}

(정의)상합과 하합을 U\_{a}^{b} (f,P) = \int\_{[a,b]} U\_{p} , L\_{a}^{b} (f,P) = \int\_{[a,b]} L\_{p} 와 같이 쓸 수 있다. 구간 [a,b]의 분할 전체의 집합을 \mathcal{P}[a,b] 라 두고 f의 리만 상적분과 리만 하적분을 각각 \overline{\int\_{a}^{b} f }= \inf{ U\_{a}^{b} (f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b] }, \underline{ \int\_{a}^{b} f }= \sup{ L\_{a}^{b} (f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b] } 와 같이 정의한다.

(정의) \lVert P \rVert := max{|y\_{i} – y\_{i-1}| : i = 1,2,…,m} 이라 정의하고 \lVert P\_{n} \rVert 이 되도록 분할열 \langle P\_{n} \rangle 을 잡으면 lim\_{n \to \infty} U(f,P\_{n}) = \overline{\int\_{a}^{b} f } 이다. lim\_{n \to \infty} L(f,P\_{n}) = \underline{\int\_{a}^{b} f } 이다. 만일 \underline{\int\_{a}^{b} f } = \overline{\int\_{a}^{b} f } 이면 f가 리만적분가능하다고 하고 그 공통값을 \int\_{a}^{b} f 라 쓴다.

(정리 1.4.1) 유계함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f 가 리만적분가능하면 f 는 잴 수 있고, 등식 \int\_{[a,b]} f = \int\_{a}^{b} f 이 성립한다.

함수 f 가 리만적분가능할 필요충분조건은 거의 모든 점에서 연속임이다.

(section 2) 미분과 르벡적분

(subsection 2.1) 단조함수의 미분과 적분의 미분

적분가능함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 새로운 함수 F를 다음 F(x) = \int\_{a}^{b} f, x \in [a,b] 와 같이 정의한다.

(비탈리)(도움정리 2.1.1) 잴 수 있는 집합 E \subset \mathbb{R} 이 \mu(E) < \infty 이고, 닫힌구간모임 \mathcal{I} 가 다음조건

임의의 \epsilon > 0 과 x \in E 에 대하여 x \in I 및 \mu(I) < \epsilon 을 만족하는 구간 I \in \mathcal{I} 가 존재한다.

을 만족하면, 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 \mu[E \setminus (I\_{1} \sqcup I\_{2} \sqcup … \sqcup I\_{n})] < \epsilon 이 성립하는 유한개의 서로소인 부분모임 {I\_{1}, I\_{2}, …, I\_{n}} \subset \mathcal{I} 이 존재한다.

(정의) 열린구간 I 에서 정의된 함수 f : I \to \mathbb{R} 의 정의역의 한 점 x \in I 에 대하여 다음 값들을 정의하자. 이 값들은 \mp \infty 를 취할 수 있는데, 이를 디니 미분계수라 한다.

D^{+} f(x) = \limsup\_{h \to 0+} \frac{f(x+h) – f(x)}{h}

D\_{+} f(x) = \liminf\_{h \to 0+} \frac{f(x+h) – f(x)}{h}

D^{-} f(x) = \limsup\_{h \to 0+} \frac{f(x) – f(x-h)}{h}

D\_{-} f(x) = \liminf\_{h \to 0+} \frac{f(x) – f(x-h)}{h}

(명제) 함수 f 가 x 에서 미분가능할 필요충분조건은 디니미분계수가 모두 유한이고 일치함이다.

(르벡)(정리 2.1.2) 임의의 단조증가함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 은 거의 모든 점에서 미분가능하다.

(명제 2.1.3) 단조증가함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 의 도함수 f’ 은 잴 수 있는 함수이고 부등식 \int\_{a}^{b} f’ \le f(b) – f(a) 를 만족한다.

(명제 2.1.4) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 L^{1} 함수 f \in L^{1}(E) 가 주어져 있을 때, 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 성질 A \in \mathfrak{M}, m(A) < \delta \implies \int\_{A} |f| < \epsilon 을 만족하는 양수 \delta >0 가 존재한다.

(첫 번째 미적분학의 기본정리) (정리 2.1.5) 르벡적분가능한 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 F(x) = F(a) + \int\_{a}^{x} f, x \in [a,b] 라 정의하면, 거의 모든 점에서 F’ = f 가 성립한다.

(푸비니) (정리 2.1.6) 구간 [a,b] 에서 정의된 단조증가함수로 이루어진 급수 \sum\_{n} f\_{n} 이 s 로 점별수렴하면 거의 모든 점에서 s’ = \sum\_{n} f’\_{n} 이 성립한다.

(subsection 2.2) 절대연속함수와 미분의 적분

(정의)칸토르 집합에 대하여, 각 n = 1,2,… 에 대하여 g(n) = \frac{3^{n}}{2^{n}}\chi\_{C\_{n}} , f\_{n}(x) = \int\_{0}^{x} g\_{n}, x \in [0,1] 이라 정의하자. |f\_{n}(x) – f\_{n+1}(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}} 이므로, 함수열 \langle f\_{n} \rangle 은 단조증가 연속함수로 고르게 수렴하는데, 그 극한함수 \phi 를 칸토르함수라 한다.

\phi는 거의 모든점에서 미분가능하고 \phi’ 이 르벡적분가능함에도 불구하고 등식 int\_{a}^{x} f’ = f(x) – f(a) , x \in [a,b] 이 성립하지 않는다.

(정의) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 가 주어져 있을 때, 임의의 \epsilon >0 에 대하여 성질

{(a\_{i},b\_{i} : i = 1,2,…,n} 이 서로소인 [a,b] 의 부분구간모임이고 \sum\_{i = 1}^{n} (b\_{i} – a\_{i}) < \delta 이면 \sum\_{i = 1}^{n}|f(b\_{i}) – f(a\_{i})| < \epsilon 이다.

을 만족하는 양수 \delta > 0 가 존재하면 f 를 절대연속함수라 한다.

(명제) f 가 적분가능하면 F는 절대연속이다. 절대연속함수는 고른연속함수이지만, 그 역은 성립하지 않는다.

(정의) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 와 구간 [a,b] 의 분할 P = {x\_{0}, … , x\_{n}} 가 주어졌을 때, 분할 P 에 의한 함수 f의 변동 V\_{a}^{b} (f,P) 를 V\_{a}^{b} (f,P) = \sum\_{i=1}^{n} |f(x\_{i}) – f(x\_{i-1})| 로 정의한다.

(정의) 집합 { V\_{a}^{b} (f,P): P \in \mathcal{P}[a,b]} 가 위로 유계일 때, 함수 f 를 유계변동함수라 하고, 이 경우 전변동 V\_{a}^{b} (f) 를 V\_{a}^{b} (f) = \sup{V\_{a}^{b} (f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]} 라 정의한다.

(죠르당)(정리 2.2.1) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 가 유계변동일 필요충분조건은 f가 단조증가함수의 차로 표시됨이다.

따라서 유계닫힌구간에서 정의된 유계변동함수는 거의 모든 점에서 미분가능하다.

(명제 2.2.2) 모든 절대연속함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 는 유계변동함수이다.

따라서 유계닫힌구간에서 정의된 임의의 절대연속함수가 거의 모든 점에서 미분가능하다.

(도움정리 2.2.3) 만일 f : [a,b] \to \mathbb{R} 이 절대연속이고 거의 모든 점에서 f’ = 0 이면 f 는 상수함수이다.

(두번째 미적분학의 기본정리) (정리 2.2.4) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 다음은 동치이다.

함수 f 가 절대연속이다.

함수 f 가 거의 모든 점에서 미분가능하고 f’ 이 르벡적분가능하며, 등식 f(x) = f(a) + \int\_{a}^{x} f’, x\in [a,b] 이 성립한다.

(정의) 임의의 단조증가함수는 절대연속함수 g와 도함수가 거의 모든 점에서 0 인 함수의 합으로 표시된다. 임의의 유계변동함수 역시 절대연속함수와 도함수가 거의 모든 점에서 0인 함수의 합으로 표시된다. 이를 르벡 분해라 한다.

(명제 2.2.5) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 가 절대연속이고 N \subset [a,b] 이 영측도집합이면 f(N) 도 영측도집합이다.

(따름정리 2.2.6) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 이 절대연속이고 E \subset [a,b]가 잴 수 있는 집합이면 f(E) 도 잴 수 있는 집합이다.

(section 3) 적분가능함수공간

(subsection 3.1)L^{p} 공간

(정의) 잴 수 있는 집합 E \subset \mathbb{R} 과 양수 p >0 에 대하여 조건 \int\_{E} |f|^{p} < \infty 를 만족하는 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 의 집합을 L^{p}(E) 라 하자.

(정의) 함수 \phi : (a,b) \to \mathbb{R} (단 -\infty \le a < b \le +\infty) 이 다음 조건을 만족할 때, \phi를 볼록함수라 부른다.

a<s<t<u<b \implies \frac{\phi(t) - \phi(s)}{t-s} \le \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u-t}

(옌센 부등식)(정리 3.1.1) 함수 f : [0,1] \to (a,b) 가 적분가능하고 \phi : (a,b) \to \mathbb{R} 이 볼록함수이면 (단 -\infty \le a < b \le +\infty) 부등식 \phi\biggl \int\_{0}^{1} f \biggr \le \int\_{0}^{1} (\phi \bullet f) 이 성립한다.

(정의) 두 양수 0 < p,q < \infty 가 다음 관계식 \frac{1}{p} + \frac{1}{q} 를 만족하면 이를 켤레지수라 부른다. 1, \infty 도 켤레지수라 한다.

(횔더 부등식, 민코프스키 부등식) (정리 3.1.2) 두 양수 p, q 가 켤레지수일 때, 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 잴 수 있는 함수 f , g : E \to [0,\infty] 에 대하여 부등식이 성립한다.

\int\_{e} fg \le \biggl \int\_{E} f^{p}\biggr^{1/p} \biggl \int\_{E} g^{p}\biggr^{1/q}

\biggl \int\_{E} (f+g)^{p}\biggr^{1/p} \le \biggl \int\_{E} f^{p}\biggr^{1/p} + \biggl \int\_{E} g^{p}\biggr^{1/q}

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 와 p \in [1,\infty) 에 대하여 \lVert f \rVert\_{p} = \biggl \int\_{E} |f|^{p}\biggr^{1/p} 라 정의한다. 그러면 \lVert fg \rVert\_{1} \le \lVert f \rVert\_{p} \lVert g \rVert\_{q} (단 1, < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \lVert f + g \rVert\_{p} \le \lVert f \rVert\_{p}+ \lVert g \rVert\_{p} (단 1 \le p < \infty) 은 횔더 부등식과 민코프스키 부등식의 또다른 형태이다. 따라서 L^{p}(E) 가 벡터공간이 된다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0,\infty] 에 대하여 esssup f = \inf{\alpha \in \mathbb{R} : \mu (f^{-1}((\alpha, \infty\rbrack)) = 0 } 이라 정의하자. 위 정의에 나오는 집합이 비어있으면 esssup f = \infty 라 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 에 대하여 \lVert f \rVert\_{\infty} = esssup|f| 라 정의한다. \lVert f \rVert\_{\infty} < \infty 인 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 전체의 집합을 L^{\infty} (E) 로 쓴다.

(정의) 복소벡터공간 X 에 함수 \lVert \rVert : X \to [0,\infty) 가 주어져서 다음 성질들을 만족하면 이를 노음공간이라 한다.

x \in X, \lVert x \rVert = 0 \implies x = 0

\alpha \in \mathbb{C}, x \in X \implies \lVert \alphax \rVert = |\alpha| \lVert x \rVert

x, y \in X \implies \lVert x+y \rVert \le \lVert x \rVert + \lVert y \rVert

(명제) 노음공간 L^{p} (E) 의 원소는 ‘거의 모든 점에서 함수값이 일치한다’는 동치관계에 의한 동치류에 의하여 생기는 함수 모임이다. 그러나 그 동치류에 속하는 함수 하나를 마치 L^{p} (E)의 원소인 것처럼 쓰기로 한다.

(정의) 노음공간의 수열 \langle x\_{n} \rangle 이 주어져 있을 때, 임의의 양수 \epsilon > 0 에 대하여 다음 성질 m , n > N \implies \lVert x\_{n} – x\_{m} \rVert < \epsilon 을 만족하는 자연수 N이 존재하면 이 수열 \langle x\_{n} \rangle 을 코시수열이라 한다.

(정의) 모든 코시수열이 수렴하는 노음공간을 바나하공간이라 한다.

(리쓰-피셔)(정리 3.1.3) 각 p \in [1,\infty] 에 대하여 L^{p} (E) 는 바나하공간이다.

(명제 3.1.4) 만일 L^{p}(E) (단, 1 \le p \le \infty) 의 수열 \langle f\_{n} \rangle 이 f \in L^{p}(E) 로 수렴하면 (즉, \lVert f\_{n} - f \rVert\_{p} \to 0 이면) 거의 모든 점에서 f로 점별수렴하는 부분수열을 가진다.

(subsection 3.2) 잴 수 있는 함수와 연속함수

(도움정리 3.2.1) 임의의 유계닫힌집합 K \subset \mathbb{R} 와 열린집합 U \subset \mathbb{R} 가 K \subset U 이면, 다음을 만족하는 연속함수 f : \mathbb{R} \to [0,1] 이 존재한다.

0 \le f \le 1, f|\_{K} = 1, f|\_{\mathbb{R} \setminus U} = 0

(루진)(정리 3.2.2) 유계구간 [a,b] 위에서 정의된 잴 수 있는 함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 가 있을 때, 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 \mu({x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)}) < \epsilon 를 만족하는 연속함수 g : [a,b] \to \mathbb{C} 가 존재한다. 만일 f \in L^{\infty} [a,b] 이면 \lVert g\rVert \_{\infty} \le \lVert f\rVert \_{\infty} 가 되도록 연속함수 g 를 택할 수 있다.

(정의) 구간 [a,b] 위에서 정의된 연속함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 를 모두 모은 벡터공간 C[a,b]

(도움정리 3.2.3) 구간 [a,b] 에서 정의된 단순함수 s : [a,b] \to \mathbb{C} 전체의 집합 S는 L^{p}[a,b] 안에서 조밀하다. (단, 1 \le p < \infty)

(정리 3.2.4) 각 p \in [1,\infty) 에 대하여, C[a,b] 는 L^{p}[a,b] 의 조밀한 부분공간이다.

(정의) 함수 f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} 의 받침 supp f 를 집합 {x : f(x) \neq 0} 의 닫힘으로 정의하고, 받침이 유계구간에 들어가는 경우 연속함수 전체의 벡터공간을 C\_{c}(\mathbb{R}) 이라 쓴다.

(정리 3.2.5) 각 p \in [1,\infty) 에 대하여, C\_{c}(\mathbb{R}) 은 L^{p}(\mathbb{R}) 의 조밀한 부분공간이다.

(정의) 집합 X의 곱집합 X \times X 에서 정의된 함수 d : X \times X \to [0,\infty) 가 다음 성질들을 만족하면 d를 거리라 하고, 거리가 주어진 집합을 거리공간이라 한다.

d(x,y) = 0 \implies x = y 이다.

d(x,y) = d(y,x) 이다.

d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) 이다.

(정의) 임의의 코시수열이 수렴하는 거리공간을 완비거리공간이라 한다.

거리공간의 부분집합은 다시 거리공간이 되며, 이를 부분공간이라 한다.

\tilde{X} 가 완비거리공간이고 X가 \tilde{X} 의 조밀한 부분공간이면 \tilde{X} 를 X의 완비화공간이라 한다.

(명제) 임의의 노음공간은 거리공간이다.

L^{p}(\mathbb{R}) 이 거리공간 (C\_{c}(\mathbb{R}), \lVert \rVert\_{p}) 의 완비화공간이다.

(정의) 실수축 위에서 정의된 연속함수 가운데 lim\_{x \to \mp \infty} f(x) = 0 인 것들을 모두 모은 벡터공간을 C\_{0}(\mathbb{R}) 이라 쓰자. 이 공간에 노음 \lVert f\rVert\_{sup} = \sup{|f(x)| : x \in \mathbb{R}} 을 부여하면, 노음공간이 된다.

(정의) 실수축에 정의된 함수 f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} 와 점 y \in \mathbb{R} 에 대하여 그 평행이동 f\_{y} 를 f\_{y}(x) = f(x-y), x \in \mathbb{R} 로 정의한다.

(정리 3.2.6) 각 함수 f \in L^{p}(\mathbb{R}) 에 대하여 (단, 1 \le p < \infty) y \mapsto f\_{y} : \mathbb{R} \to L^{p}(\mathbb{R}) 은 고른연속함수이다.

(도움정리 3.2.7) 유한측도집합 E \subset \mathbb{R} 에서 정의된 잴 수 있는 복소함수열 \langle f\_{n} \rangle 이 거의 모든 점에서 f : E \to \mathbb{C} 로 수렴한다고 가정하자. 그러면, 임의의 양수 \epsilon >0 과 \delta >0 에 대하여 다음 성질과 \mu(A) < \delta 를 만족하는 집합 A \subset E 와 자연수 N 을 잡을 수 있다.

n \ge N, x \in E \setminus A \implies |f(x) – f\_{n}(x)| < \epsilon

(에고로프)(정리 3.2.8) 유한측도집합 E \subset \mathbb{R} 에서 정의된 잴 수 있는 복소함수열 \langle f\_{n} \rangle 이 거의 모든 점에서 f : E \to \mathbb{C} 로 수렴한다고 가정하자. 그러면 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 다음 성질을 만족하는 집합 A \subset E 를 잡을 수 있다.

\mu(A) < \epsilon, \langle f\_{n} \rangle 이 E \setminus A 위에서 고르게 수렴한다.

(subsection 3.3) 양측도와 적분

(정의) 집합 X의 부분집합모임 \mathfrak{S}가 다음 성질을 만족할 때, 이를 \sigma-대수라 부른다.

\empty \subset \mathfrak{S }

만일 A \in \mathfrak{S} 이면 A^{c} \in \mathfrak{S} 이다.

각 n = 1,2, … 에 대하여 A\_{n} \in \mathfrak{S} 이면 \bigcup\_{n = 1}^{\infty} A\_[n] \in \mathfrak{S} 이다.

(정의) 만일 함수 \mu : \mathfrak{S} \to [0,\infty] 가 다음 성질을 만족하고 \mu(\empty) = 0 이면, 이를 양측도 혹은 그냥 측도라 한다. 또한, 집합모임 \mathfrak{S} 에 들어가는 X의 부분집합들을 잴수있는 집합이라 부른다.

{A\_{n} \in \mathfrak{S} : n = 1,2, …} 가 서로소 \implies \mu\biggl \bigsqcup\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \sum\_{n = 1}^{\infty} \mu(A\_{n})

(명제 3.3.1) 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 에 대하여 다음이 성립한다.

A \subset B 이면 (단 A, B \in \mathfrak{S}) \mu(A) \le \mu(B) 이다.

잴수있는 단순증가 집합열 \langle A\_{n} \rangle 에 대하여 등식 \mu \biggl \bigcup\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \lim\_{n \to \infty} \mu(A\_{n}) 이 성립한다.

잴 수 있는 단순감소 집합열 \langle A\_{n} \rangle 에 대하여 \mu(A\_{1}) < \infty 이면 등식 \mu \biggl \bigcap\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \lim\_{n \to \infty} \mu(A\_{n}) 가 성립한다.

(정의) 다음 세 가지 성질을 만족하는 함수 \mu : \mathcal{P} (X) \to [0,\infty] 를 집합 X의 외측도라 한다.

\mu(\empty) = 0

만일 S \subseteq T 이면 \mu(S) \le \mu(T) 이다.

임의의 셀 수 있는 집합 모임 {S\_{n} : n = 1,2,…} 에 대하여 \mu \biggl( \bigcup\_{n = 1}^{\infty} S\_{n} \biggr) \le \sum\_{n=1}^{\infty} \mu(S\_{n}) 이 성립한다.

(정의) 카라테오도리 조건 S \subseteq X \implies \mu(S) = \mu(S \cap E) + \mu(S \cap E^{c}) 를 만족하는 집합 E \subset X 들의 모임을 \mathfrak{S} 라 한다.

(명제 3.3.2) 집합 X에 외측도 \mu : \mathcal{P} (X) \to [0, \infty] 가 주어져 있을 때, 카라테오도리 조건을 만족하는 집합모임 \mathfrak{S} 는 \sigma – 대수가 되고, \mu(S) = 0 이면 S \in \mathfrak(S) 이다. 또한 \mu 를 \mathfrak(S) 에 제한하면 측도가 된다.

(명제 3.3.3) 집합 X 에서 정의된 함수 f : X \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 다음은 동치이다.

함수 f는 잴 수 있는 함수이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \ge a} \in \mathfrak{S} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) < a} \in \mathfrak{S} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \le a} \in \mathfrak{S} 이다.

(명제 3.3.4) 집합 X에서 정의된 함수 f : X \to [-\infty, \infty] 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f, g가 잴 수 있고 \alpha \in \mathbb{R} 이면 f + g, fg, \alpha f 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 f\_{n} 이 잴 수 있으면 함수 x \mapsto \inf\_{n} f\_{n} (x) 와 x \mapsto \sup\_{n}f\_{n}(x) 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 함수 f\_{n} 이 잴 수 있으면 점별극한함수 \limsup\_{n} f\_{n} , \liminf\_{n} f\_{n}, \lim\_{n} f\_{n} 도 잴 수 있다.

함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 이 잴 수 있고, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 이 연속이면 그 합성함수 g \bullet f 도 잴 수 있다. 여기서, f(x) = \mp \infty 인 x \in E 에 대해서는 (g \bullet f) (x) = \mp \infty 로 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{R} 의 치역이 유한집합이면, 이를 단순함수라 한다.

치역이 {c\_{1}, …, c\_{n}} 인 단순함수 s : E \to \mathbb{R} 가 있을 때, 각 i = 1,2,…, n 에 대하여 E\_{i} = { x \in E : s(x) = c\_{i}} 라 두면 {E\_{i}} 는 서로소이고 s 는 s = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} \chi\_{E\_{i}} 같이 잴 수 있는 특성함수들의 선형결합으로 표시할 수 있다.

(정의) 정의된 단순함수가 s \ge 0 일때, 그 적분을 \int\_{E} s d\mu = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} m\muE\_{i}) 라 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0, +\infty] 의 적분을 \inf\_{E} f = sup{\inf\_{E} s : 0 \le s \le f, s 는 단순함수} 로 정의한다.

(정의) 함수 f : X \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 f\_{+} (x) = max{f(x),0}, f\_{-} (x) = - min{f(x),0}, x \in X 라 두면 f\_{+}, f\_{-} \ge 0 이고 f = f\_{+} – f\_{-} 이다.

(정의) 함수 f 의 적분을 \int\_{E} f d\mu = \int\_{E} f\_{+} d\mu - \int\_{E} f\_{-} d\mu 라 정의한다. 만일 함수 f\_{+} 와 함수 f\_{-} 의 적분값이 모두 무한이면 f의 적분을 정의하지 않는다.

(정의) 함수 f\_{+}와 f\_{-} 의 적분값이 모두 유한일 때, 함수 f 를 적분가능함수라 한다.

(정의) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 복소함수 f : E \to \mathbb{C} 에 대해 함수 f = u + iv 의 실수부를 u, 허수부를 v라 하자. u와 v가 잴 수 있으면 f가 잴 수 있다고 한다.복소함수의 적분을 \int\_{E} (u + iv) d\mu = \int\_{E} u d\mu + i \int\_{E} v d\mu 라 정의한다. 적분가능성은 똑같이 정의한다.

(명제) 서로소인 잴 수 있는 집합 모임 {A\_{n} : n = 1,2, …} 에 대하여 A = \sqcup\_{n = 1}^{\infty} A\_{n} 이라 하자. 그러면 임의의 잴 수 있는 함수 f : X \to [0,\infty] 및 적분가능함수 f : X \to \mathbb{C} 에 대하여 등식 \int\_{A} f d\mu = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{A\_{n}} f d\mu 이 성립한다.

(명제) 잴 수 있는 함수 f, g : X \to [0,\infty] 혹은 적분가능함수 f, g : X \to \mathbb{C} 에 대하여 등식 \int\_{X} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\_{X} f d\mu + \beta \int\_{X} g d\mu 가 성립한다. (단 \alpha, \beta 는 상수)

(명제)집합 X에서 [0, + \infty] 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여, 부등식 \int\_{X} (\liminf\_{n \to \infty} f\_{n}) d\mu \le \liminf\_{n \to \infty} \int\_{X} f\_{n} d\mu 이 성립한다.

(명제) 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 이 거의 모든 점에서 f로 수렴하는 경우, 만일 0 \le f\_{1} \le f\_{2} \le … 이거나 각 n = 1,2, … 에 대하여 |f\_{n}| \le g 인 g \in L^{1}(X) 가 존재한다면, 등식 \lim\_{n \to \infty} \int\_{X} f\_{n} d\mu = \int\_{X} f d\mu 이 성립한다.

(명제) X에서 [0, +\infty] 로 가는 임의의 잴수있는 함수열 \langle f\_{n} \rangle 에 대하여 등식 \int\_{X} \biggl( \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n} \biggr) d\mu = \sum\_{n = 1}^{\infty}\int\_{X} f\_{n} d\mu 를 얻는다.

(명제) X 에서 \mathbb{C} 로 가는 L^{1}-함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여 급수 \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} |f\_{n}| 가 수렴하면, 거의 모든 x \in E 에 대하여 급수 \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 가 절대수렴한다. 또한, 그 극한값을 f(x) = \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 라 두면 f \in L^{1}(X) 이고 그 적분값은 \int\_{E} f d\mu = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{X} f\_{n} d\mu 로 주어진다.

(명제) 집합 X 에서 정의된 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f \ge 0 이고 \inf\_{X} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

만일 f \in L^{1} (X) 이고 임의의 잴 수 있는 집합 D \subset X 에 대하여 \int\_{D} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0이다.

(명제 3.3.5) 집합 X의 측도 \mu(X) 가 유한값이고, F \subset \mathbb{C} 가 닫힌 집합이라 하자. 만일 f \in L^{1}(X, \mathfrak{S}, \mu) 가 다음 조건을 만족하면 거의 모든 점 x \in X 에 대하여 f(x) \in F 가 성립한다.

E \in \mathfrak{S}, \mu(E) >0 \implies \frac{1}{\mu(E)} \int\_{E} f d\mu \in F

(정의) 집합 X의 멱집합 \mathcal{P} 는 \sigma -대수이다. 각 A \in \mathcal{P}(X) 에 대하여 c(A) 를 집합 A의 원소의 개수라 정의하면 이는 양측도가 되는데, 함수 f : X \to \mathbb{C} 의 적분 \int\_{X} f dc 를 그냥 \sum\_{x \in X} f(x) 라 쓴다. 그러나 \sum\_{x \in X} f(x) 는 함수 f 가 f \ge 0 이거나, 적분가능할 때에만 그 의미가 있다.

(명제) 앞의 정의의 경우 X = \sqcup\_{n=1}^{\infty} X\_{n} 이면 등식 \sum\_{x\inX} f(x) = \sum\_{n=1}^{\infty}\sum\_{x \in X\_{n}} f(x) 이 성립한다.

(명제 3.3.6) 함수 f : X \to \mathbb{C} 에 대하여 등식 \sum\_{x \in X} |f(x)| = \sup {\sum\_{x \in F} |f(x)| : F \subset X 는 유한집합이다} 이 성립한다.

(따름정리 3.3.7) 각 자연수 m,n = 1, 2, … 에 대하여 a\_{m,n} \in \mathbb{C} 이 주어져있을 때, 다음이 성립한다.

만일 a\_{m,n} \ge 0 이면, \sum\_{n = 1}^{\infty} \sum\_{m = 1}^{\infty} a\_{m,n} =\sum\_{m = 1}^{\infty} \sum\_{n = 1}^{\infty} a\_{m,n} 이 성립한다.

다음 성질 \sum\_{n} b\_{n} < \infty, \sum\_{m=1}^{\infty} |a\_{m,n}| \le b\_{n} , n = 1,2, … 을 만족하는 급수 \sum b\_{n} 이 있으면, \sum\_{n = 1}^{\infty} \sum\_{m = 1}^{\infty} a\_{m,n} =\sum\_{m = 1}^{\infty} \sum\_{n = 1}^{\infty} a\_{m,n} 이 성립한다.

(정의) 함수 f : X \to \mathbb{C} 와 p \in [1,\infty) 에 대하여 \lVert f \rVert\_{p} = \biggl( \int\_{X} |f|^{p} d\mu \biggr)^{1/p} 라 정의하고, \lVert f \rVert\_{\infty} 역시 이전과 같이 정의한다.

(정의) \lVert f \rVert\_{p} < \infty 인 함수 f : X \to \mathbb{C} 전체의 집합을 L^{p}(X, \mathfrak{S},\mu), 줄여서 L^{p}(X,\mu) 혹은 L^{p}(\mu) 라 쓴다. 만일 E \in \mathbb{R} 이 잴 수 있는 집합이고 m 이 르벡측도라면 L^{p}(E,m) 을 그냥 L^{p}(E) 라 쓴다. L^{p}(\mu) 는 바나하공간이 된다.

(명제 3.3.8) 단순함수 s : X \to \mathbb{C} 가운데 \mu{x\in X : s(x) \neq 0} < \infty 를 만족하는 것들 전체의 집합 S는 L^{p}(\mu) 안에서 조밀하다. (단, 1 \le p < \infty)

(정의) 개수를 세는 측도에 의한 공간 L^{p}(X,\mathcal{P}, c) 는 \mathcal{l}^{p}(X) 라 쓴다. X가 자연수 집합이면 \mathcal{l}^{p} 라 쓴다.

(명제) \mathcal{l}^{\infty} 는 유계수열공간이고 \mathcal{l}^{1} 은 절대수렴하는 수열들을 모아놓은 공간이 된다. 노음공간 \mathcal{l}^{p}({1,2,…,n}) 은 \lVert x\rVert\_{p} = (|x\_{1}|^{p} + … + |x\_{n}|^{p})^{1/p}, x = (x\_{1}, x\_{2}, …, x\_{n}) 으로 노음이 부여된 노음공간 (\mathbb{C}^{n}, \lVert \rVert\_{p} ) 이 된다.

(정의) 벡터공간 V 의 부분집합 S \subset V 가 다음 조건을 만족하면 S를 볼록집합이라 부른다.

x , y \in S, 0 \le t \le 1 \implies tx + (1-t)y \in S

(명제) 1 \le p < q \le \infty \implies \mathcal{l}^{p}(X) \subset \mathcal{l}^{q}(X)

\mu(X) < \infty, 1 \le p < q \le \infty \implies L^{q}(X,\mu) \subset L^{p}(X,\mu)

(section 4) 이중적분

(subsection 4.1) 곱측도

(명제) 집합 X, Y 에 각각 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak(I), \nu) 가 주어져 있다. 집합 X \times Y 의 \sigma-대수는 \mathfrak(R) = {S\timesT \subset X\timesY : S \in \mathfrak{S}, T \in \mathfrak{T}}를 포함해야 한다.

(정의) 집합 E \subset X \times Y 와 x \in X, y \in Y 에 대하여 E\_{x} = {y \in Y : (x,y) \in E}, E^{y} = {x \in X : (x,y) \in E} 라고 정의하자. 만일 각 x \in X, y \in Y 에 대하여 E\_{x} \in \mathfrak{I}, E^{y} \in \mathfrak{S} 라면 두 함수 \phi : x \mapsto \nu(E\_{x}) = \int\_{Y} \chi\_{E}(x,y) d\nu(y), \psi : y \mapsto \nu(E^{y}) = \int\_{X} \chi\_{E}(x,y) d\mu(y) 로 정의할 수 있다. 만일 두 함수 \phi, \psi 가 각각 잴 수 있는 함수이고 등식 \int\_{X} \phi d\mu = \int\_{Y} \psi d\nu 이면 이 공통값을 E의 측도로 정의한다.