르벡적분

잴 수 있는 집합과 측도

열린 집합 U \mathbb{R}의 한 점 x \in U 를 고정하고 a\_{x} = inf{a\in \mathbb{R} : (a,x) \subseteq U } , b\_{x} = sup{b\in \mathbb{R} : (a,b) \subseteq U } 라 정의한다. I\_{x} = (a\_{x} , b\_{x}) 라 두자. U = \bigcup\_{x \in U} I\_{x} 는 서로소인 열린 구간들의 합집합이다.

(명제 1.1.1) 실수의 부분집합 U \subseteq \mathbb{R} 가 열린 집합이라면, U는 셀 수 있는 서로소인 열린 구간의 합집합으로 표시된다. 또한 이 표시방법은 한 가지 뿐이다.

열린 집합 U \mathbb{R} 가 서로소인 열린 구간의 합집합 \sqcup\_{n}(a\_{n} b\_{n}) 으로 표시되었을 때 그 길이 \lambda(U) 를 \lambda(U) = \sum\_{n = 1}^{\infty} (b\_{n} – a\_{n}) 으로 정의한다.

임의의 집합 S \subset \mathbb{R} 에 대하여 그 길이 \mu(S) 를 \mu(S) = inf{\lambda(U) : U \supseteq S, U는 열린 집합} 으로 정의한다.

집합 S \subset \mathbb{R}과 점 x \in \mathbb{R} 에 대하여 x + S = {x + y \in \mathbb{R} : y \in S} 로 정의하고 이를 집합 S 의 평행이동이라 부른다.

(명제 1.1.2) 함수 \mu : \mathcal{P}(R) \to [0,\infty] 는 다음 성질을 가진다.

만일 S \subseteq T 이면 \mu(S) \le \mu(T) 이다.

만일 I 가 a, b를 양끝점으로 하는 구간이면 \mu(I) = |b – a| 이다.

임의의 x \in \mathbb{R} 와 S \ini \mathcal{R} 에 대하여 \mu(x + S) = \mu(S)이다.

임의의 셀 수 있는 집합 모임 {S\_{n} : n = 1,2,…} 에 대하여 \mu \biggl( \bigcup\_{n = 1}^{\infty} S\_{n} \biggr) \le \sum\_{n=1}^{\infty} \mu(S\_{n}) 이 성립한다.

집합 E \subseteq \mathbb{R}이 다음 조건 A \subseteq \mathbb{R} \implies \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^{c}) 를 만족하면 E를 잴 수 있는 집합이라 부르고, 잴 수 있는 집합 전체의 모임을 \mathfrak{M} 이라 쓴다.. 잴 수 있는 집합의 조건은 카라테오도리 조건이라 불린다.

(정리 1.1.3) 집합 모임 \mathfrak{M}은 다음 성질을 가진다.

\empty \subset \mathfrak{M}

만일 E \in \mathfrak{M} 이면 E^{c} \in \mathfrak{M} 이다.

만일 E, F \in \mathfrak{M} 이면 E \cup F \in \mathfrak{M} 이다.

각 n = 1,2, … 에 대하여 E\_{n} \in \mathfrak{M} 이면 \bigcup\_{n} E\_[n] \in \mathfrak{M} 이다.

만일 \mu€ = 0 이면 E \in \mathfrak{M} 이다.

집합 I 가 구간이면 I \in \mathfrak{M} 이다.

집합 S가 열린 집합이면 S \in \mathfrak{M} 이다.

(정리 1.1.4) 각 n \ 1,2, … 에 대하여 E\_{n} \in \mathfrak{M} 이고 집합모임 {E\_{n}} 이 서로소이면 등식 \mu \biggl( \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \sum\_{n=1}^{\infty} \mu(E\_{n}) 이 성립한다.

(따름정리 1.1.5) 잴 수 있는 단순증가 집합열 <E\_{n}> 에 대하여 등식 \mu \biggl( \bigcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(E\_{n}) 이 성립한다. 또한 잴 수 있는 단순감소 집합열 <F\_{n}> 에 대하여 \mu(F\_{1}) < \infty 이면 등식 \mu \biggl( \bigcap\_{n = 1}^{\infty} F\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(F\_{n}) 이 성립한다.

열린 집합들의 셀 수 있는 교집합으로 표시되는 집합을 G\_{delta} -집합 이라 하고, 닫힌 집합들의 셀 수 있는 합집합으로 표시되는 집합을 F\_{delta} -집합이라 부른다. 이 두 부류의 집합들은 잴 수 있다.

(명제 1.1.6) 집합 E \subset \mathbb{R} 에 대하여 다음이 동치이다.

E가 잴 수 있는 집합이다.

임의의 양수 \epsilon > 0 에 대하여 F \subset E \subset U, \mu(U \setminus F) < \epsilon 인 열린 집합 U 와 닫힌 집합 F 가 존재한다.

B \subset E \subset A , \mu(A \setminus B) = 0 를 만족하는 G\_{delta}= 집합 A 와 F\_{delta} -집합 B 가 존재한다.

(따름정리 1.1.7) 임의의 잴 수 있는 집합 E \subset \mathbb{R} 에 대하여 등식 \mu(E) = \sup{\mu(K) : K \subset E, K 는 닫힌 유계집합}

(정의) 우선 구간 I = [0,1] 을 삼등분하여 가운데 열린구간 J\_{1} 를 들어내고, 즉 C\_{1} = I \setminus J\_{1} 이라 두고 C\_{1}의 두 구간에 대하여도 똑 같은 일을 되풀이한다. C\_{2} 의 네 구간에 대하여도 똑 같은 일을 되풀이한다. 이렇게 하여 얻은 닫힌 집합열 \langle C\_{n} \rangle 들의 교집합을 C = \bigcup C\_{n} 이라 두고 이를 칸토르 집합이라 한다.

함수 \mu : \mathcal{P} (\mathbb{R}) \to [0,\infty] 를 \mathfrak{M} 에 제한했을 때 이를 m : \mathfrak{M} \to [0,\infty] 이라 쓰자.

임의의 집합 X의 멱집합의 부분집합 \mathfrak{S} 가 (정리 1.1.3) 의 첫 번쨰 조건부터 네 번째 조건까지를 만족하면, 이를 \sigma – 대수라 부른다.

X의 \sigma – 대수가 주어지고 함수 \mu : \mathfrak{S} \to [0,\infty] 가 조건 \mu \biggl( \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(E\_{n}) 를 만족하면, (\mathfrak{S}, \mu) 를 X의 측도라 하고, \mathfrak{S} 의 원들을 잴 수 있는 집합이라 부른다.

따라서 (\mathfrak{M},m) 은 \mathbb{R}의 측도인데, 이를 르벡 측도라 한다.

집합 X의 한 점 x \in X를 고정하고, 임의의 집합 A \subset X 에 대하여 \delta\_{x}(A) = \begin{cases}1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} 라 정의하면 (\mathcal{P}(X) , \delta\_{x}) 는 X의 측도가 되는데, 이렇게 정의된 측도를 디락 측도라 부른다.

(subsection 1.2)잴 수 있는 함수와 적분

(정의) 확장실수체 \mathbb{R}^{\*} = \mathbb{R} \cup {\mp \infty}

(정의) 잴 수 있는 집합 E \subseteq \mathbb{R} 에서 정의된 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 이 다음 조건 a\in \mathbb{R} \implies {x \in E : f(x) > a} \in \mathfrak{M} 을 만족하면 이를 잴 수 있는 함수라 한다.

(정의) 집합 A \subseteq \mathbb{R} 에 대하여, 그 특성함수 \chi\_{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 를 \chi\_{A}(x) = \begin{cases}1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} 라 정의하자.

그러면 집합 A가 잴 수 있을 필요충분조건은 \chi\_{A} 가 잴 수 있는 함수임이다.

(명제 1.2.1) 잴 수 있는 집합 E 에서 정의된 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 다음은 동치이다.

함수 f는 잴 수 있는 함수이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \ge a} \in \mathfrak{M} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) < a} \in \mathfrak{M} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \le a} \in \mathfrak{M} 이다.

(따름정리 1.2.2) 함수 f: E \to \mathbb{R}^{\*} 이 잴 수 있으면, 임의의 a \in \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 집합 {x \in E : f(x) = a} 는 잴 수 있다.

(명제 1.2.3) 잴 수 있는 집합 E 에서 \mathbb{R}^{\*} 로 가는 함수들에 대하여 다음이 성립한다.

연속함수 f : E \to \mathbb{R} 은 잴 수 있다.

만일 f, g가 잴 수 있고 \alpha \in \mathbb{R} 이면 f + g, fg, \alpha f 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 f\_{n} 이 잴 수 있으면 함수 x \mapsto \inf\_{n} f\_{n} (x) 와 x \mapsto \sup\_{n}f\_{n}(x) 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 함수 f\_{n} 이 잴 수 있으면 점별극한함수 \limsup\_{n} f\_{n} , \liminf\_{n} f\_{n}, \lim\_{n} f\_{n} 도 잴 수 있다.

함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 이 잴 수 있고, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 이 연속이면 그 합성함수 g \bullet f 도 잴 수 있다. 여기서, f(x) = \mp \infty 인 x \in E 에 대해서는 (g \bullet f) (x) = \mp \infty 로 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{R} 의 치역이 유한집합이면, 이를 단순함수라 한다.

치역이 {c\_{1}, …, c\_{n}} 인 단순함수 s : E \to \mathbb{R} 가 있을 때, 각 i = 1,2,…, n 에 대하여 E\_{i} = { x \in E : s(x) = c\_{i}} 라 두면 {E\_{i}} 는 서로소이고 s 는 s = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} \chi\_{E\_{i}} 같이 잴 수 있는 특성함수들의 선형결합으로 표시할 수 있다.

(정의) 정의된 단순함수가 s \ge 0 일때, 그 적분을 \int\_{E} s = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} m(E\_{i}) 라 정의한다.

\int\_{E} (s+t) = \int\_{E} s + \int\_{E} t

\int\_{E} (cs) = c\int\_{E} s

s \le t \implies \int\_{E} s \le \int\_{E} t

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0, +\infty] 의 적분을 \infty\_{E} f = sup{\infty\_{E} s : 0 \le s \le f, s 는 단순함수} 로 정의한다.

0 \le g \le f \implies 0 \le \int g \le \int f

(정리 1.2.4) 임의의 잴 수 있는 함수 f : E \to [0,\infty] 는 단조증가하는 단순함수의 점별극한함수로 표시된다.

(따름정리 1.2.5) 임의의 잴 수 있는 함수 f : E \to [0, +\infty] 는, 적절한 양수열 \left \langle c\_{n} \right \rangle 과 잴 수 있는 집합열 \left \langle E\_{n} \right \rangle 에 대하여 f = \sum\_{n = 1}^{\infty} c\_{n} \chi\_{E\_{i}} 로 표시된다.

(정의) 함수 f : X \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 f\_{+} (x) = max{f(x),0}, f\_{-} (x) = - min{f(x),0}, x \in X 라 두면 f\_{+}, f\_{-} \ge 0 이고 f = f\_{+} – f\_{-} 이다. 만일 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 가 잴 수 있으면 (명제 1.2.3)에 의하여 f\_{+} 와 f\_{-} 도 잴 수 있다.

(정의) 함수 f 의 적분을 \int\_{E} f = \int\_{E} f\_{+} - \int\_{E} f\_{-} 라 정의한다. 만일 함수 f\_{+} 와 함수 f\_{-} 의 적분값이 모두 무한이면 f의 적분을 정의하지 않는다.

(정의) 함수 f\_{+}와 f\_{-} 의 적분값이 모두 유한일 때, 함수 f 를 르벡적분 가능한 함수 혹은 L^{1}-함수라 부른다. 또한, 잴수 있는 집합 E 위에서 정의된 르벡적분 가능한 함수 전체의 집합을 L^{1} (E) 라 쓴다.

만일 f \le g 이면 \iint\_{E} f \le \int\_{E} g 이다.

만일 m(E) = 0 이면, 임의의 함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 가 잴 수 있고 \int\_{E} f = 0 이다.

(정리 1.2.6) 서로소인 잴 수 있는 집합 모임 {A\_{n} : n = 1,2, …} 에 대하여 A = \sqcup\_{n = 1}^{\infty} A\_{n} 이라 하자. 그러면 임의의 잴 수 있는 함수 f : A \to [0,\infty] 에 대하여 등식 \infty\_{A} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{A\_{n}} f 이 성립한다.

(따름정리 1.2.7) 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 f \in L^{1} (E) 일 필요충분조건은 |f| \in L^{1} (E) 이고 이 때 부등식 |\int\_{E} f| \le \int\_{E} |f| 이 성립한다.

(정의) 잴 수 있는 집합 E 의 각 점 x \in E 에 관한 명제 P(x) 가 있을 때, m({x \in E : P(x) 가 성립하지 않는다}) = 0 이면 거의 모든 점에서 P(x) 가 성립한다고 한다.

(명제 1.2.8) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0,\infty] 의 적분값이 유한이면 f는 거의 모든 점에서 유한값을 가진다.

(정의) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 복소함수 f : E \to \mathbb{C} 에 대해 함수 f = u + iv 의 실수부를 u, 허수부를 v라 하자. u와 v가 잴 수 있으면 f가 잴 수 있다고 한다.

만일 \int\_{E} |f| 가 유한값이면 f를 르벡적분가능함수라 부른다.

(정의) 복소함수의 적분을 \int\_{E} (u + iv) = \int\_{E} u + i \int\_{E} v 라 정의한다. 앞으로 L^{1}(E) 는 E에서 \mathbb{C} 로 가는 르벡적분가능함수 전체의 집합을 나타낸다.

L^{1}(E) 는 벡터공간이다.

\int\_{E} (\alpha f) = \alpha \int\_{E} f f \in L^{1}(E), \alpha \in \mathbb{C}

|\int\_{E} f| \le \int\_{E} |f|

(따름정리 1.2.9) 서로소인 잴 수 있는 집합모임 {A\_{n} : n = 1,2,…} 에 대하여 A = \sqcup\_{n = 1}^{\infty} A\_{n} 이라 하자. 그러면 임의의 f \in L^{1}(A) 에 대하여 \infty\_{A} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{A\_{n}} f 이 성립한다.

(명제 1.2.10) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f \ge 0 이고 \inf\_{E} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

만일 f \in L^{1} (E) 이고 임의의 잴 수 있는 집합 D \subset E 에 대하여 \int\_{D} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0이다.

(명제 1.2.11) 구간 [a,b] 위에서 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 가 잴 수 있고, 모든 점 x 에 대하여 등식 \int\_{[a,x]} f = 0 이 성립하면, 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

(subsection 1.3) 적분의 수렴정리

(단조수렴정리)(정리 1.3.1) 잴 수 있는 집합 E에서 \mathbb{R}^{\*} 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 이 다음 조건 0 \le f\_{n} \le f\_{n+1}, n = 1, 2, … 을 만족한다고 하자. 만일 각 x \in E 에 대하여 f(x) = lim\_{n} f\_{n}(x) 이면, \inf\_{E} f = \lim\_{n \to \infty} \int\_{E} f\_{n} 이 성립한다.

(정리 1.3.2) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 잴 수 있는 함수 f, g 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f, g \in L^{1}(E) 이면 f + g \in L^{1} (E) 이다. 또한 f, g \ge 0 이거나 f, g \in L^{1} (E) 이면 등식 \int\_{E} (f + g) = \int\_{E} f + \int\_{E} g 이 성립한다.

만일 f \in L^{1}(E) 이고 \alpha \in \mathbb{C} 이면, \alpha f \in L^{1} (E) 이고 등식 \int\_{E} (\alpha f) = \alpha \int\_{E} f 이 성립한다.

(따름정리 1.3.3) 잴 수 있는 집합 E에서 [0,\infty] 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여 f(x) = \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 라 정의하면, 등식 \int\_{E} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} f\_{n} 이 성립한다.

(파투) (정리 1.3.4) 잴 수 있는 집합 E에서 [0, + \infty] 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여, 부등식 \int\_{E} (\liminf\_{n \to \infty} f\_{n}) \le \liminf\_{n \to \infty} \int\_{E} f\_{n} 이 성립한다.

(르벡 수렴정리)(정리 1.3.5) 잴 수 있는 집합 E 에서 \mathbb{C} 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 이 다음 조건을 만족한다고 하자.

각 n = 1,2, … 에 대하여 |f\_{n}| \le g 인 g \in L^{1}(E) 가 존재한다.

각 x \in E 에 대하여 극한값 \lim\_{n} f\_{n}(x) 가 존재한다.

이 때, f(x) = lim\_{n} f\_{n}(x) 라 두면, f \in L^{1}(E) 이고 등식 \lim\_{n \to \infty} \int\_{E} |f\_{n} – f| = 0, \lim\_{n \to \infty} \int\_{E} f\_{n} = \int\_{E} f 이 성립한다.

(레비)(정리 1.3.6) 잴 수 있는 집합 E 에서 \mathbb{C} 로 가는 L^{1}-함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여 \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} |f\_{n}| < \infty 이라 가정하자. 그러면 거의 모든 x \in E 에 대하여 급수 \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 가 절대수렴한다. 또한, 그 극한값을 f(x) = \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 라 두면 f \in L^{1}(E) 이고 그 적분값은 \int\_{E} f = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} f\_{n} 로 주어진다.

(명제 1.3.7) 열린구간 I, J 의 곱집합 I \times J 위에서 정의된 이변수함수 f : I \times J \to \mathbb{C} 가 주어져있다. 각 x \in I 에 대하여 일변수함수 y \mapsto f(x,y) 가 잴 수 있는 함수이고, I \times J 위에서 편도함수 D\_{1}f 가 존재한다고 하자. 만일 조건 |D\_{1}f(x,y)| \le g(y), x \in I 를 만족하는 적분가능함수 g \in L^{1}(J) 가 존재하면 등식 \frac{d}{dx} \int\_{J} f(x,y) dy = \int\_{J} D\_{1}f(x,y)dy 이 성립한다.

(명제) 세 조건을 만족하는 함수 \mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty] 는 존재하지 않는다.

만일 I 가 a, b를 양끝점으로 하는 구간이면 \mu(I) = |b – a| 이다.

임의의 x \in \mathbb{R} 와 S \ini \mathcal{R} 에 대하여 \mu(x + S) = \mu(S)이다.

\biggl( \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n} \biggr) = \lim\_{n \to \infty} \mu(E\_{n})

(명제 1.3.6) 집합 E \subset \mathbb{R} 의 모든 부분집합이 잴 수 있으면 \mu(E) = 0 이다.

(subsection 1.4) 리만적분과 르벡적분

(정의) 유계함수 f : [a,b] \to [0, \infty] 와 분할 P = {x\_{0}(=a) , x\_{1}, …, x\_{n} (=b)} 및 i = 1,2, …, n 에 대하여 M\_{i} = \sup{f(x) : x\_{i-1} \le x \le x\_{i}}, m\_{i} = \inf{f(x) : x\_{i-1} \le x \le x\_{i}} 라 두고, 두 단순함수 U\_{p} 와 L\_{p} 를 U\_{p} = f(a)\_{ \chi\_{{a}}} + \sum\_{i = 1}^{n} M\_{i\chi\_{(x\_{i-1}, x\_{i}\rbrack}}, L\_{p} = f(a)\_{ \chi\_{{a}}} + \sum\_{i = 1}^{n} m\_{i\chi\_{(x\_{i-1}, x\_{i}\rbrack}}

(정의)상합과 하합을 U\_{a}^{b} (f,P) = \int\_{[a,b]} U\_{p} , L\_{a}^{b} (f,P) = \int\_{[a,b]} L\_{p} 와 같이 쓸 수 있다. 구간 [a,b]의 분할 전체의 집합을 \mathcal{P}[a,b] 라 두고 f의 리만 상적분과 리만 하적분을 각각 \overline{\int\_{a}^{b} f }= \inf{ U\_{a}^{b} (f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b] }, \underline{ \int\_{a}^{b} f }= \sup{ L\_{a}^{b} (f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b] } 와 같이 정의한다.

(정의) \lVert P \rVert := max{|y\_{i} – y\_{i-1}| : i = 1,2,…,m} 이라 정의하고 \lVert P\_{n} \rVert 이 되도록 분할열 \langle P\_{n} \rangle 을 잡으면 lim\_{n \to \infty} U(f,P\_{n}) = \overline{\int\_{a}^{b} f } 이다. lim\_{n \to \infty} L(f,P\_{n}) = \underline{\int\_{a}^{b} f } 이다. 만일 \underline{\int\_{a}^{b} f } = \overline{\int\_{a}^{b} f } 이면 f가 리만적분가능하다고 하고 그 공통값을 \int\_{a}^{b} f 라 쓴다.

(정리 1.4.1) 유계함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f 가 리만적분가능하면 f 는 잴 수 있고, 등식 \int\_{[a,b]} f = \int\_{a}^{b} f 이 성립한다.

함수 f 가 리만적분가능할 필요충분조건은 거의 모든 점에서 연속임이다.

(section 2) 미분과 르벡적분

(subsection 2.1) 단조함수의 미분과 적분의 미분

적분가능함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 새로운 함수 F를 다음 F(x) = \int\_{a}^{b} f, x \in [a,b] 와 같이 정의한다.

(비탈리)(도움정리 2.1.1) 잴 수 있는 집합 E \subset \mathbb{R} 이 \mu(E) < \infty 이고, 닫힌구간모임 \mathcal{I} 가 다음조건

임의의 \epsilon > 0 과 x \in E 에 대하여 x \in I 및 \mu(I) < \epsilon 을 만족하는 구간 I \in \mathcal{I} 가 존재한다.

을 만족하면, 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 \mu[E \setminus (I\_{1} \sqcup I\_{2} \sqcup … \sqcup I\_{n})] < \epsilon 이 성립하는 유한개의 서로소인 부분모임 {I\_{1}, I\_{2}, …, I\_{n}} \subset \mathcal{I} 이 존재한다.

(정의) 열린구간 I 에서 정의된 함수 f : I \to \mathbb{R} 의 정의역의 한 점 x \in I 에 대하여 다음 값들을 정의하자. 이 값들은 \mp \infty 를 취할 수 있는데, 이를 디니 미분계수라 한다.

D^{+} f(x) = \limsup\_{h \to 0+} \frac{f(x+h) – f(x)}{h}

D\_{+} f(x) = \liminf\_{h \to 0+} \frac{f(x+h) – f(x)}{h}

D^{-} f(x) = \limsup\_{h \to 0+} \frac{f(x) – f(x-h)}{h}

D\_{-} f(x) = \liminf\_{h \to 0+} \frac{f(x) – f(x-h)}{h}

(명제) 함수 f 가 x 에서 미분가능할 필요충분조건은 디니미분계수가 모두 유한이고 일치함이다.

(르벡)(정리 2.1.2) 임의의 단조증가함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 은 거의 모든 점에서 미분가능하다.

(명제 2.1.3) 단조증가함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 의 도함수 f’ 은 잴 수 있는 함수이고 부등식 \int\_{a}^{b} f’ \le f(b) – f(a) 를 만족한다.

(명제 2.1.4) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 L^{1} 함수 f \in L^{1}(E) 가 주어져 있을 때, 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 성질 A \in \mathfrak{M}, m(A) < \delta \implies \int\_{A} |f| < \epsilon 을 만족하는 양수 \delta >0 가 존재한다.

(첫 번째 미적분학의 기본정리) (정리 2.1.5) 르벡적분가능한 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 F(x) = F(a) + \int\_{a}^{x} f, x \in [a,b] 라 정의하면, 거의 모든 점에서 F’ = f 가 성립한다.

(푸비니) (정리 2.1.6) 구간 [a,b] 에서 정의된 단조증가함수로 이루어진 급수 \sum\_{n} f\_{n} 이 s 로 점별수렴하면 거의 모든 점에서 s’ = \sum\_{n} f’\_{n} 이 성립한다.

(subsection 2.2) 절대연속함수와 미분의 적분

(정의)칸토르 집합에 대하여, 각 n = 1,2,… 에 대하여 g(n) = \frac{3^{n}}{2^{n}}\chi\_{C\_{n}} , f\_{n}(x) = \int\_{0}^{x} g\_{n}, x \in [0,1] 이라 정의하자. |f\_{n}(x) – f\_{n+1}(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}} 이므로, 함수열 \langle f\_{n} \rangle 은 단조증가 연속함수로 고르게 수렴하는데, 그 극한함수 \phi 를 칸토르함수라 한다.

\phi는 거의 모든점에서 미분가능하고 \phi’ 이 르벡적분가능함에도 불구하고 등식 int\_{a}^{x} f’ = f(x) – f(a) , x \in [a,b] 이 성립하지 않는다.

(정의) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 가 주어져 있을 때, 임의의 \epsilon >0 에 대하여 성질

{(a\_{i},b\_{i} : i = 1,2,…,n} 이 서로소인 [a,b] 의 부분구간모임이고 \sum\_{i = 1}^{n} (b\_{i} – a\_{i}) < \delta 이면 \sum\_{i = 1}^{n}|f(b\_{i}) – f(a\_{i})| < \epsilon 이다.

을 만족하는 양수 \delta > 0 가 존재하면 f 를 절대연속함수라 한다.

(명제) f 가 적분가능하면 F는 절대연속이다. 절대연속함수는 고른연속함수이지만, 그 역은 성립하지 않는다.

(정의) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 와 구간 [a,b] 의 분할 P = {x\_{0}, … , x\_{n}} 가 주어졌을 때, 분할 P 에 의한 함수 f의 변동 V\_{a}^{b} (f,P) 를 V\_{a}^{b} (f,P) = \sum\_{i=1}^{n} |f(x\_{i}) – f(x\_{i-1})| 로 정의한다.

(정의) 집합 { V\_{a}^{b} (f,P): P \in \mathcal{P}[a,b]} 가 위로 유계일 때, 함수 f 를 유계변동함수라 하고, 이 경우 전변동 V\_{a}^{b} (f) 를 V\_{a}^{b} (f) = \sup{V\_{a}^{b} (f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]} 라 정의한다.

(죠르당)(정리 2.2.1) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 가 유계변동일 필요충분조건은 f가 단조증가함수의 차로 표시됨이다.

따라서 유계닫힌구간에서 정의된 유계변동함수는 거의 모든 점에서 미분가능하다.

(명제 2.2.2) 모든 절대연속함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 는 유계변동함수이다.

따라서 유계닫힌구간에서 정의된 임의의 절대연속함수가 거의 모든 점에서 미분가능하다.

(도움정리 2.2.3) 만일 f : [a,b] \to \mathbb{R} 이 절대연속이고 거의 모든 점에서 f’ = 0 이면 f 는 상수함수이다.

(두번째 미적분학의 기본정리) (정리 2.2.4) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 에 대하여 다음은 동치이다.

함수 f 가 절대연속이다.

함수 f 가 거의 모든 점에서 미분가능하고 f’ 이 르벡적분가능하며, 등식 f(x) = f(a) + \int\_{a}^{x} f’, x\in [a,b] 이 성립한다.

(정의) 임의의 단조증가함수는 절대연속함수 g와 도함수가 거의 모든 점에서 0 인 함수의 합으로 표시된다. 임의의 유계변동함수 역시 절대연속함수와 도함수가 거의 모든 점에서 0인 함수의 합으로 표시된다. 이를 르벡 분해라 한다.

(명제 2.2.5) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 가 절대연속이고 N \subset [a,b] 이 영측도집합이면 f(N) 도 영측도집합이다.

(따름정리 2.2.6) 함수 f : [a,b] \to \mathbb{R} 이 절대연속이고 E \subset [a,b]가 잴 수 있는 집합이면 f(E) 도 잴 수 있는 집합이다.

(section 3) 적분가능함수공간

(subsection 3.1)L^{p} 공간

(정의) 잴 수 있는 집합 E \subset \mathbb{R} 과 양수 p >0 에 대하여 조건 \int\_{E} |f|^{p} < \infty 를 만족하는 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 의 집합을 L^{p}(E) 라 하자.

(정의) 함수 \phi : (a,b) \to \mathbb{R} (단 -\infty \le a < b \le +\infty) 이 다음 조건을 만족할 때, \phi를 볼록함수라 부른다.

a<s<t<u<b \implies \frac{\phi(t) - \phi(s)}{t-s} \le \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u-t}

(옌센 부등식)(정리 3.1.1) 함수 f : [0,1] \to (a,b) 가 적분가능하고 \phi : (a,b) \to \mathbb{R} 이 볼록함수이면 (단 -\infty \le a < b \le +\infty) 부등식 \phi\biggl \int\_{0}^{1} f \biggr \le \int\_{0}^{1} (\phi \bullet f) 이 성립한다.

(정의) 두 양수 0 < p,q < \infty 가 다음 관계식 \frac{1}{p} + \frac{1}{q} 를 만족하면 이를 켤레지수라 부른다. 1, \infty 도 켤레지수라 한다.

(횔더 부등식, 민코프스키 부등식) (정리 3.1.2) 두 양수 p, q 가 켤레지수일 때, 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 잴 수 있는 함수 f , g : E \to [0,\infty] 에 대하여 부등식이 성립한다.

\int\_{e} fg \le \biggl \int\_{E} f^{p}\biggr^{1/p} \biggl \int\_{E} g^{p}\biggr^{1/q}

\biggl \int\_{E} (f+g)^{p}\biggr^{1/p} \le \biggl \int\_{E} f^{p}\biggr^{1/p} + \biggl \int\_{E} g^{p}\biggr^{1/q}

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 와 p \in [1,\infty) 에 대하여 \lVert f \rVert\_{p} = \biggl \int\_{E} |f|^{p}\biggr^{1/p} 라 정의한다. 그러면 \lVert fg \rVert\_{1} \le \lVert f \rVert\_{p} \lVert g \rVert\_{q} (단 1, < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \lVert f + g \rVert\_{p} \le \lVert f \rVert\_{p}+ \lVert g \rVert\_{p} (단 1 \le p < \infty) 은 횔더 부등식과 민코프스키 부등식의 또다른 형태이다. 따라서 L^{p}(E) 가 벡터공간이 된다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0,\infty] 에 대하여 esssup f = \inf{\alpha \in \mathbb{R} : \mu (f^{-1}((\alpha, \infty\rbrack)) = 0 } 이라 정의하자. 위 정의에 나오는 집합이 비어있으면 esssup f = \infty 라 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 에 대하여 \lVert f \rVert\_{\infty} = esssup|f| 라 정의한다. \lVert f \rVert\_{\infty} < \infty 인 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{C} 전체의 집합을 L^{\infty} (E) 로 쓴다.

(정의) 복소벡터공간 X 에 함수 \lVert \rVert : X \to [0,\infty) 가 주어져서 다음 성질들을 만족하면 이를 노음공간이라 한다.

x \in X, \lVert x \rVert = 0 \implies x = 0

\alpha \in \mathbb{C}, x \in X \implies \lVert \alphax \rVert = |\alpha| \lVert x \rVert

x, y \in X \implies \lVert x+y \rVert \le \lVert x \rVert + \lVert y \rVert

(명제) 노음공간 L^{p} (E) 의 원소는 ‘거의 모든 점에서 함수값이 일치한다’는 동치관계에 의한 동치류에 의하여 생기는 함수 모임이다. 그러나 그 동치류에 속하는 함수 하나를 마치 L^{p} (E)의 원소인 것처럼 쓰기로 한다.

(정의) 노음공간의 수열 \langle x\_{n} \rangle 이 주어져 있을 때, 임의의 양수 \epsilon > 0 에 대하여 다음 성질 m , n > N \implies \lVert x\_{n} – x\_{m} \rVert < \epsilon 을 만족하는 자연수 N이 존재하면 이 수열 \langle x\_{n} \rangle 을 코시수열이라 한다.

(정의) 모든 코시수열이 수렴하는 노음공간을 바나하공간이라 한다.

(리쓰-피셔)(정리 3.1.3) 각 p \in [1,\infty] 에 대하여 L^{p} (E) 는 바나하공간이다.

(명제 3.1.4) 만일 L^{p}(E) (단, 1 \le p \le \infty) 의 수열 \langle f\_{n} \rangle 이 f \in L^{p}(E) 로 수렴하면 (즉, \lVert f\_{n} - f \rVert\_{p} \to 0 이면) 거의 모든 점에서 f로 점별수렴하는 부분수열을 가진다.

(subsection 3.2) 잴 수 있는 함수와 연속함수

(도움정리 3.2.1) 임의의 유계닫힌집합 K \subset \mathbb{R} 와 열린집합 U \subset \mathbb{R} 가 K \subset U 이면, 다음을 만족하는 연속함수 f : \mathbb{R} \to [0,1] 이 존재한다.

0 \le f \le 1, f|\_{K} = 1, f|\_{\mathbb{R} \setminus U} = 0

(루진)(정리 3.2.2) 유계구간 [a,b] 위에서 정의된 잴 수 있는 함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 가 있을 때, 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 \mu({x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)}) < \epsilon 를 만족하는 연속함수 g : [a,b] \to \mathbb{C} 가 존재한다. 만일 f \in L^{\infty} [a,b] 이면 \lVert g\rVert \_{\infty} \le \lVert f\rVert \_{\infty} 가 되도록 연속함수 g 를 택할 수 있다.

(정의) 구간 [a,b] 위에서 정의된 연속함수 f : [a,b] \to \mathbb{C} 를 모두 모은 벡터공간 C[a,b]

(도움정리 3.2.3) 구간 [a,b] 에서 정의된 단순함수 s : [a,b] \to \mathbb{C} 전체의 집합 S는 L^{p}[a,b] 안에서 조밀하다. (단, 1 \le p < \infty)

(정리 3.2.4) 각 p \in [1,\infty) 에 대하여, C[a,b] 는 L^{p}[a,b] 의 조밀한 부분공간이다.

(정의) 함수 f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} 의 받침 supp f 를 집합 {x : f(x) \neq 0} 의 닫힘으로 정의하고, 받침이 유계구간에 들어가는 경우 연속함수 전체의 벡터공간을 C\_{c}(\mathbb{R}) 이라 쓴다.

(정리 3.2.5) 각 p \in [1,\infty) 에 대하여, C\_{c}(\mathbb{R}) 은 L^{p}(\mathbb{R}) 의 조밀한 부분공간이다.

(정의) 집합 X의 곱집합 X \times X 에서 정의된 함수 d : X \times X \to [0,\infty) 가 다음 성질들을 만족하면 d를 거리라 하고, 거리가 주어진 집합을 거리공간이라 한다.

d(x,y) = 0 \implies x = y 이다.

d(x,y) = d(y,x) 이다.

d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) 이다.

(정의) 임의의 코시수열이 수렴하는 거리공간을 완비거리공간이라 한다.

거리공간의 부분집합은 다시 거리공간이 되며, 이를 부분공간이라 한다.

\tilde{X} 가 완비거리공간이고 X가 \tilde{X} 의 조밀한 부분공간이면 \tilde{X} 를 X의 완비화공간이라 한다.

(명제) 임의의 노음공간은 거리공간이다.

L^{p}(\mathbb{R}) 이 거리공간 (C\_{c}(\mathbb{R}), \lVert \rVert\_{p}) 의 완비화공간이다.

(정의) 실수축 위에서 정의된 연속함수 가운데 lim\_{x \to \mp \infty} f(x) = 0 인 것들을 모두 모은 벡터공간을 C\_{0}(\mathbb{R}) 이라 쓰자. 이 공간에 노음 \lVert f\rVert\_{sup} = \sup{|f(x)| : x \in \mathbb{R}} 을 부여하면, 노음공간이 된다.

(정의) 실수축에 정의된 함수 f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} 와 점 y \in \mathbb{R} 에 대하여 그 평행이동 f\_{y} 를 f\_{y}(x) = f(x-y), x \in \mathbb{R} 로 정의한다.

(정리 3.2.6) 각 함수 f \in L^{p}(\mathbb{R}) 에 대하여 (단, 1 \le p < \infty) y \mapsto f\_{y} : \mathbb{R} \to L^{p}(\mathbb{R}) 은 고른연속함수이다.

(도움정리 3.2.7) 유한측도집합 E \subset \mathbb{R} 에서 정의된 잴 수 있는 복소함수열 \langle f\_{n} \rangle 이 거의 모든 점에서 f : E \to \mathbb{C} 로 수렴한다고 가정하자. 그러면, 임의의 양수 \epsilon >0 과 \delta >0 에 대하여 다음 성질과 \mu(A) < \delta 를 만족하는 집합 A \subset E 와 자연수 N 을 잡을 수 있다.

n \ge N, x \in E \setminus A \implies |f(x) – f\_{n}(x)| < \epsilon

(에고로프)(정리 3.2.8) 유한측도집합 E \subset \mathbb{R} 에서 정의된 잴 수 있는 복소함수열 \langle f\_{n} \rangle 이 거의 모든 점에서 f : E \to \mathbb{C} 로 수렴한다고 가정하자. 그러면 임의의 양수 \epsilon >0 에 대하여 다음 성질을 만족하는 집합 A \subset E 를 잡을 수 있다.

\mu(A) < \epsilon, \langle f\_{n} \rangle 이 E \setminus A 위에서 고르게 수렴한다.

(subsection 3.3) 양측도와 적분

(정의) 집합 X의 부분집합모임 \mathfrak{S}가 다음 성질을 만족할 때, 이를 \sigma-대수라 부른다.

\empty \subset \mathfrak{S }

만일 A \in \mathfrak{S} 이면 A^{c} \in \mathfrak{S} 이다.

각 n = 1,2, … 에 대하여 A\_{n} \in \mathfrak{S} 이면 \bigcup\_{n = 1}^{\infty} A\_[n] \in \mathfrak{S} 이다.

(정의) 만일 함수 \mu : \mathfrak{S} \to [0,\infty] 가 다음 성질을 만족하고 \mu(\empty) = 0 이면, 이를 양측도 혹은 그냥 측도라 한다. 또한, 집합모임 \mathfrak{S} 에 들어가는 X의 부분집합들을 잴수있는 집합이라 부른다.

{A\_{n} \in \mathfrak{S} : n = 1,2, …} 가 서로소 \implies \mu\biggl \bigsqcup\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \sum\_{n = 1}^{\infty} \mu(A\_{n})

(명제 3.3.1) 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 에 대하여 다음이 성립한다.

A \subset B 이면 (단 A, B \in \mathfrak{S}) \mu(A) \le \mu(B) 이다.

잴수있는 단순증가 집합열 \langle A\_{n} \rangle 에 대하여 등식 \mu \biggl \bigcup\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \lim\_{n \to \infty} \mu(A\_{n}) 이 성립한다.

잴 수 있는 단순감소 집합열 \langle A\_{n} \rangle 에 대하여 \mu(A\_{1}) < \infty 이면 등식 \mu \biggl \bigcap\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \lim\_{n \to \infty} \mu(A\_{n}) 가 성립한다.

(정의) 다음 세 가지 성질을 만족하는 함수 \mu : \mathcal{P} (X) \to [0,\infty] 를 집합 X의 외측도라 한다.

\mu(\empty) = 0

만일 S \subseteq T 이면 \mu(S) \le \mu(T) 이다.

임의의 셀 수 있는 집합 모임 {S\_{n} : n = 1,2,…} 에 대하여 \mu \biggl( \bigcup\_{n = 1}^{\infty} S\_{n} \biggr) \le \sum\_{n=1}^{\infty} \mu(S\_{n}) 이 성립한다.

(정의) 카라테오도리 조건 S \subseteq X \implies \mu(S) = \mu(S \cap E) + \mu(S \cap E^{c}) 를 만족하는 집합 E \subset X 들의 모임을 \mathfrak{S} 라 한다.

(명제 3.3.2) 집합 X에 외측도 \mu : \mathcal{P} (X) \to [0, \infty] 가 주어져 있을 때, 카라테오도리 조건을 만족하는 집합모임 \mathfrak{S} 는 \sigma – 대수가 되고, \mu(S) = 0 이면 S \in \mathfrak(S) 이다. 또한 \mu 를 \mathfrak(S) 에 제한하면 측도가 된다.

(명제 3.3.3) 집합 X 에서 정의된 함수 f : X \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 다음은 동치이다.

함수 f는 잴 수 있는 함수이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \ge a} \in \mathfrak{S} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) < a} \in \mathfrak{S} 이다.

임의의 a \in \mathbb{R} 에 대하여 {x \in E : f(x) \le a} \in \mathfrak{S} 이다.

(명제 3.3.4) 집합 X에서 정의된 함수 f : X \to [-\infty, \infty] 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f, g가 잴 수 있고 \alpha \in \mathbb{R} 이면 f + g, fg, \alpha f 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 f\_{n} 이 잴 수 있으면 함수 x \mapsto \inf\_{n} f\_{n} (x) 와 x \mapsto \sup\_{n}f\_{n}(x) 도 잴 수 있다.

각 n = 1,2, …. 에 대하여 함수 f\_{n} 이 잴 수 있으면 점별극한함수 \limsup\_{n} f\_{n} , \liminf\_{n} f\_{n}, \lim\_{n} f\_{n} 도 잴 수 있다.

함수 f : E \to \mathbb{R}^{\*} 이 잴 수 있고, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 이 연속이면 그 합성함수 g \bullet f 도 잴 수 있다. 여기서, f(x) = \mp \infty 인 x \in E 에 대해서는 (g \bullet f) (x) = \mp \infty 로 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to \mathbb{R} 의 치역이 유한집합이면, 이를 단순함수라 한다.

치역이 {c\_{1}, …, c\_{n}} 인 단순함수 s : E \to \mathbb{R} 가 있을 때, 각 i = 1,2,…, n 에 대하여 E\_{i} = { x \in E : s(x) = c\_{i}} 라 두면 {E\_{i}} 는 서로소이고 s 는 s = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} \chi\_{E\_{i}} 같이 잴 수 있는 특성함수들의 선형결합으로 표시할 수 있다.

(정의) 정의된 단순함수가 s \ge 0 일때, 그 적분을 \int\_{E} s d\mu = \sum\_{i = 1}^{n} c\_{i} m\muE\_{i}) 라 정의한다.

(정의) 잴 수 있는 함수 f : E \to [0, +\infty] 의 적분을 \inf\_{E} f = sup{\inf\_{E} s : 0 \le s \le f, s 는 단순함수} 로 정의한다.

(정의) 함수 f : X \to \mathbb{R}^{\*} 에 대하여 f\_{+} (x) = max{f(x),0}, f\_{-} (x) = - min{f(x),0}, x \in X 라 두면 f\_{+}, f\_{-} \ge 0 이고 f = f\_{+} – f\_{-} 이다.

(정의) 함수 f 의 적분을 \int\_{E} f d\mu = \int\_{E} f\_{+} d\mu - \int\_{E} f\_{-} d\mu 라 정의한다. 만일 함수 f\_{+} 와 함수 f\_{-} 의 적분값이 모두 무한이면 f의 적분을 정의하지 않는다.

(정의) 함수 f\_{+}와 f\_{-} 의 적분값이 모두 유한일 때, 함수 f 를 적분가능함수라 한다.

(정의) 잴 수 있는 집합 E에서 정의된 복소함수 f : E \to \mathbb{C} 에 대해 함수 f = u + iv 의 실수부를 u, 허수부를 v라 하자. u와 v가 잴 수 있으면 f가 잴 수 있다고 한다.복소함수의 적분을 \int\_{E} (u + iv) d\mu = \int\_{E} u d\mu + i \int\_{E} v d\mu 라 정의한다. 적분가능성은 똑같이 정의한다.

(명제) 서로소인 잴 수 있는 집합 모임 {A\_{n} : n = 1,2, …} 에 대하여 A = \sqcup\_{n = 1}^{\infty} A\_{n} 이라 하자. 그러면 임의의 잴 수 있는 함수 f : X \to [0,\infty] 및 적분가능함수 f : X \to \mathbb{C} 에 대하여 등식 \int\_{A} f d\mu = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{A\_{n}} f d\mu 이 성립한다.

(명제) 잴 수 있는 함수 f, g : X \to [0,\infty] 혹은 적분가능함수 f, g : X \to \mathbb{C} 에 대하여 등식 \int\_{X} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\_{X} f d\mu + \beta \int\_{X} g d\mu 가 성립한다. (단 \alpha, \beta 는 상수)

(명제)집합 X에서 [0, + \infty] 로 가는 잴 수 있는 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여, 부등식 \int\_{X} (\liminf\_{n \to \infty} f\_{n}) d\mu \le \liminf\_{n \to \infty} \int\_{X} f\_{n} d\mu 이 성립한다.

(명제) 함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 이 거의 모든 점에서 f로 수렴하는 경우, 만일 0 \le f\_{1} \le f\_{2} \le … 이거나 각 n = 1,2, … 에 대하여 |f\_{n}| \le g 인 g \in L^{1}(X) 가 존재한다면, 등식 \lim\_{n \to \infty} \int\_{X} f\_{n} d\mu = \int\_{X} f d\mu 이 성립한다.

(명제) X에서 [0, +\infty] 로 가는 임의의 잴수있는 함수열 \langle f\_{n} \rangle 에 대하여 등식 \int\_{X} \biggl( \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n} \biggr) d\mu = \sum\_{n = 1}^{\infty}\int\_{X} f\_{n} d\mu 를 얻는다.

(명제) X 에서 \mathbb{C} 로 가는 L^{1}-함수열 \left \langle f\_{n} \right \rangle 에 대하여 급수 \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{E} |f\_{n}| 가 수렴하면, 거의 모든 x \in E 에 대하여 급수 \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 가 절대수렴한다. 또한, 그 극한값을 f(x) = \sum\_{n = 1}^{\infty} f\_{n}(x) 라 두면 f \in L^{1}(X) 이고 그 적분값은 \int\_{E} f d\mu = \sum\_{n = 1}^{\infty} \int\_{X} f\_{n} d\mu 로 주어진다.

(명제) 집합 X 에서 정의된 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

만일 f \ge 0 이고 \inf\_{X} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

만일 f \in L^{1} (X) 이고 임의의 잴 수 있는 집합 D \subset X 에 대하여 \int\_{D} f = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0이다.

(명제 3.3.5) 집합 X의 측도 \mu(X) 가 유한값이고, F \subset \mathbb{C} 가 닫힌 집합이라 하자. 만일 f \in L^{1}(X, \mathfrak{S}, \mu) 가 다음 조건을 만족하면 거의 모든 점 x \in X 에 대하여 f(x) \in F 가 성립한다.

E \in \mathfrak{S}, \mu(E) >0 \implies \frac{1}{\mu(E)} \int\_{E} f d\mu \in F

(정의) 집합 X의 멱집합 \mathcal{P} 는 \sigma -대수이다. 각 A \in \mathcal{P}(X) 에 대하여 c(A) 를 집합 A의 원소의 개수라 정의하면 이는 양측도가 되는데, 함수 f : X \to \mathbb{C} 의 적분 \int\_{X} f dc 를 그냥 \sum\_{x \in X} f(x) 라 쓴다. 그러나 \sum\_{x \in X} f(x) 는 함수 f 가 f \ge 0 이거나, 적분가능할 때에만 그 의미가 있다.

(명제) 앞의 정의의 경우 X = \sqcup\_{n=1}^{\infty} X\_{n} 이면 등식 \sum\_{x\inX} f(x) = \sum\_{n=1}^{\infty}\sum\_{x \in X\_{n}} f(x) 이 성립한다.

(명제 3.3.6) 함수 f : X \to \mathbb{C} 에 대하여 등식 \sum\_{x \in X} |f(x)| = \sup {\sum\_{x \in F} |f(x)| : F \subset X 는 유한집합이다} 이 성립한다.

(따름정리 3.3.7) 각 자연수 m,n = 1, 2, … 에 대하여 a\_{m,n} \in \mathbb{C} 이 주어져있을 때, 다음이 성립한다.

만일 a\_{m,n} \ge 0 이면, \sum\_{n = 1}^{\infty} \sum\_{m = 1}^{\infty} a\_{m,n} =\sum\_{m = 1}^{\infty} \sum\_{n = 1}^{\infty} a\_{m,n} 이 성립한다.

다음 성질 \sum\_{n} b\_{n} < \infty, \sum\_{m=1}^{\infty} |a\_{m,n}| \le b\_{n} , n = 1,2, … 을 만족하는 급수 \sum b\_{n} 이 있으면, \sum\_{n = 1}^{\infty} \sum\_{m = 1}^{\infty} a\_{m,n} =\sum\_{m = 1}^{\infty} \sum\_{n = 1}^{\infty} a\_{m,n} 이 성립한다.

(정의) 함수 f : X \to \mathbb{C} 와 p \in [1,\infty) 에 대하여 \lVert f \rVert\_{p} = \biggl( \int\_{X} |f|^{p} d\mu \biggr)^{1/p} 라 정의하고, \lVert f \rVert\_{\infty} 역시 이전과 같이 정의한다.

(정의) \lVert f \rVert\_{p} < \infty 인 함수 f : X \to \mathbb{C} 전체의 집합을 L^{p}(X, \mathfrak{S},\mu), 줄여서 L^{p}(X,\mu) 혹은 L^{p}(\mu) 라 쓴다. 만일 E \in \mathbb{R} 이 잴 수 있는 집합이고 m 이 르벡측도라면 L^{p}(E,m) 을 그냥 L^{p}(E) 라 쓴다. L^{p}(\mu) 는 바나하공간이 된다.

(명제 3.3.8) 단순함수 s : X \to \mathbb{C} 가운데 \mu{x\in X : s(x) \neq 0} < \infty 를 만족하는 것들 전체의 집합 S는 L^{p}(\mu) 안에서 조밀하다. (단, 1 \le p < \infty)

(정의) 개수를 세는 측도에 의한 공간 L^{p}(X,\mathcal{P}, c) 는 \mathcal{l}^{p}(X) 라 쓴다. X가 자연수 집합이면 \mathcal{l}^{p} 라 쓴다.

(명제) \mathcal{l}^{\infty} 는 유계수열공간이고 \mathcal{l}^{1} 은 절대수렴하는 수열들을 모아놓은 공간이 된다. 노음공간 \mathcal{l}^{p}({1,2,…,n}) 은 \lVert x\rVert\_{p} = (|x\_{1}|^{p} + … + |x\_{n}|^{p})^{1/p}, x = (x\_{1}, x\_{2}, …, x\_{n}) 으로 노음이 부여된 노음공간 (\mathbb{C}^{n}, \lVert \rVert\_{p} ) 이 된다.

(정의) 벡터공간 V 의 부분집합 S \subset V 가 다음 조건을 만족하면 S를 볼록집합이라 부른다.

x , y \in S, 0 \le t \le 1 \implies tx + (1-t)y \in S

(명제) 1 \le p < q \le \infty \implies \mathcal{l}^{p}(X) \subset \mathcal{l}^{q}(X)

\mu(X) < \infty, 1 \le p < q \le \infty \implies L^{q}(X,\mu) \subset L^{p}(X,\mu)

(section 4) 이중적분

(subsection 4.1) 곱측도

(명제) 집합 X, Y 에 각각 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak(I), \nu) 가 주어져 있다. 집합 X \times Y 의 \sigma-대수는 \mathfrak(R) = {S\timesT \subset X\timesY : S \in \mathfrak{S}, T \in \mathfrak{T}}를 포함해야 한다.

(정의 1) 집합 E \subset X \times Y 와 x \in X, y \in Y 에 대하여 E\_{x} = {y \in Y : (x,y) \in E}, E^{y} = {x \in X : (x,y) \in E} 라고 정의하자. 만일 각 x \in X, y \in Y 에 대하여 E\_{x} \in \mathfrak{T}, E^{y} \in \mathfrak{S} 라면 두 함수 \phi : x \mapsto \nu(E\_{x}) = \int\_{Y} \chi\_{E}(x,y) d\nu(y), \psi : y \mapsto \nu(E^{y}) = \int\_{X} \chi\_{E}(x,y) d\mu(y) 로 정의할 수 있다.

(정의 2) 만일 두 함수 \phi, \psi 가 각각 잴 수 있는 함수이고 등식 \int\_{X} \phi d\mu = \int\_{Y} \psi d\nu 이면 이 공통값을 E의 측도로 정의한다.

(정의) X와 Y가 유한측도를 가지는 부분집합들로 분할될 수 있다 가정한다. 즉, X = \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} X\_{n}, Y=\bigsqcup\_{m = 1}^{\infty} Y\_{m} 이라 가정한다. (단, 각 m, n = 1,2,…에 대하여 \mu(X\_{n}), \nu(Y\_{m}) < \infty) 두 집합 모임 \mathfrak{B} = {E \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{T} : (정의 1) 에서 정의한 두 함수 \phi, \psi 가 잴 수 있고 (정의 2)의 등식이 성립한다}

\mathfrak{C} = {E \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{T} : E \cap (X\_{n} \times Y\_[m]) \in \mathfrak{B} (m,n = 1,2,…)}

(도움정리 4.1.1) 집합모임 \mathfrak{B}와 \mathfrak{C} 에 대하여 다음이 성립한다.

\mathfrak{B} 는 단조증가하는 집합열의 합집합에 대하여 닫혀있다.

\mathfrak{B} 는 서로소인 집합열의 합집합에 대하여 닫혀있다.

\mathfrak{C} 는 단조증가하는 집합열의 합집합과 단조감소 집합열의 교집합에 대하여 닫혀있다.

만일 E\_{1} , …, E\_{n} \in \mathfrak{R} 이 서로소이면 \bigsqcup\_{n = 1}^{N} E\_{n} \in \mathfrak{C}이다.

(정의) 전체집합 X가 유한측도를 가지는 부분집합열의 합집합으로 표시되면 , (X ,\mu) 를 \sigma -유한측도 라 한다.

(정리 4.1.2) 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak{T},\nu) 가 주어져 있을 때, 잴수있는 상자들을 포함하는 최소의 \sigma-대수를 \mathfrak{S} \times \mathfrak{T} 라 쓰자. 만일 E \in \mathfrak{S} 이면, 임의의 x \in X 와 y \in Y 에 대하여 E\_{x} \in \mathfrak{T} 및 E^{y} \in \mathfrak{S 가 성립한다. 만일 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak{T},\nu) 가 각각 \sigma-유한이면 (정의 1) 의 \phi,\psi 가 각각 잴 수 있는 함수이고 (정의 2)의 등식이 성립한다.

(정의) (정의 2)의 등식의 공통값을 (\mu \times \nu)(E) 라 쓰면, (X \times Y, \mathfrak{S} \times \mathfrak{T} , \mu \times \nu) 를 \sigma -유한측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak{T},\nu)의 곱측도라 부른다.

(정의) 르벡측도 (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, m) 에 대해 좌표공간 \mathbb(R)^{n} 의 열린 집합들을 포함하는 최소의 \sigma-대수를 \mathfrak{B}\_{n} 이라 쓰면, \mathfrak{B}\_{2} \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} 이 된다. 집합모임 \mathfrak{B}\_{n} 에 들어가는 \mathbb{R}^{n} 의 부분집합을 보렐집합이라고 한다.

닫힌집합, G\_{\delta} 집합, F\_{\delta}-집합 등은 보렐집합의 예이다.

(정의) 측도 (X,\mathfrak{S}, \mu) 가 성질 E \subset F , F \in \mathfrak{S} , \mu(F) = 0 \implies E \in \mathfrak{S} 를 만족하면 이를 완비측도라 한다.

(명제 4.1.3) 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 에 대하여 집합모임 \mathfrak{S}^{\*} = {E \subset X : A \subset E \subset B 및 \mu(B\setminus A) = 0 을 만족하는 A,B \in \mathfrak{S} 가 존재한다.} 을 생각하고, 각 E \in \mathfrak{S}^{\*} 에 대하여 \mu^{\*}(E) = \mu(A) 라 정의하자. 그러면 (X, \mathfrak(S)^{\*}, \mu^{\*}) 는 완비측도가 된다.

(정의) (\mathfrak{M} \times \mathfrak{M})^{\*} = \mathfrak{B}\_{2}^{\*} 이다. 이 \sigma -대수를 \mathfrak{M}\_{2} 라 두고 이 위에서 정의된 측도 (m \times m) 을 m\_{2} 라 쓰면 완비측도 (\mathbb{R}^{2}, \mathfrak{M}\_{2}, m\_{2}) 를 얻는데, 이를 \mathbb{R}^{2} 의 르벡측도라 한다.

(subsection 4.2) 푸비니 정리

(정의) 지금부터 집합 X, Y 에 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak{T}, \nu) 가 주어져있다고 가정하고 X \times Y 위에 정의된 임의의 함수 f 에 대하여 f\_{x} : y \mapsto f(x,y), f^{y} : x \mapsto f(x,y) 라 정의한다.

(명제 4.2.1) 함수 f : X \times Y \to \mathbb{R}^{\*} 이 \mathfrak{S} \times \mathfrak{T} 에 대하여 잴 수 있는 함수라 하자. 그러면, 임의의 x \in X 와 y \in Y 에 대하여 f\_{x} 와 f^{y} 는 각각 \mathfrak{T} 와 \mathfrak{S} 에 대하여 잴 수 있는 함수이다.

(토넬리)(정리 4.2.2) 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak{T}, \nu) 가 각각 \sigma-유한이라고 하자. 그러면 임의의 잴 수 있는 함수 f : X \times Y \to [0,\infty] 에 대하여 다음이 성립한다.

함수 x \mapsto \int\_{Y}f\_{x}d\nu 와 y \mapsto \int\_{X}f^{y}d\mu 가 각각 잴 수 있는 함수이다.

등식 \int\_{X}[\int\_{Y}f\_{x}d\nu]d\mu = \int\_{X\timesY}fd(\mu\times\nu) = \int\_{y} [\int\_{X} f^{y}d\mu] d\nu

(푸비니)(정리 4.2.3) 양측도 (X, \mathfrak{S}, \mu) 와 (Y, \mathfrak{T}, \nu)가 각각 \sigma -유한이라고 하자. 잴 수 있는 함수 f:X \times Y \to \mathbb{C} 가 \int\_{X} [\int\_{Y} |f(x,y)| d\nu(y) ] d\mu(x) < \infty 를 만족하면 다음이 성립한다.

f \in L^{1}(\mu \times \nu) 이다. 또한, 거의 모든 x \in X 에 대하여 f\_{x} \in L^{1}(\nu) 이고, 거의 모든 y \in Y 에 대하여 f^{y} \in L^{1}(\mu) 이다.

거의 모든 점에서 정의된 두 함수 x \mapsto \int\_{Y} f\_{x}d\nu 와 y \mapsto \int\_{x}f^{y} d\mu 가 각각 적분가능함수이다.

등식 \int\_{X}[\int\_{Y} f\_{x}d\nu] d\mu = \int\_{X \times Y}fd(\mu \times \nu) = \int\_{Y}[\int\_{X} f^{y}d\mu] d\nu 이 성립한다.

(정의) 좌표공간 \mathbb{R}^{n} 위에 정의된 함수가 \sigma-대수 \mathfrak{B} 에 대하여 잴 수 있으면 이를 보렐함수라 부른다. 그냥 잴 수 있는 함수라 하면 르벡측도 (\mathfrak{M}\_{n}, m\_{n}) 에 대하여 잴 수 있음을 뜻한다.

(명제 4.2.4) 양측도 (X, \mathfrak{S} , \mu) 에 대하여 잴 수 있는 함수인 f : X \to \mathbb{R} 과 보렐함수 g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} 에 대하여 그 합성함수 g \bullet f : X \to \mathbb{R} 은 잴 수 있는 함수이다.

(명제 4.2.5) 좌표공간 \mathbb{R}^{n} 에서 정의된 잴 수 있는 함수 f 가 주어지면, 거의 모든 점에서 f = g 인 보렐함수 g 가 존재한다.

(토넬리-푸비니)(정리 4.2.6) 좌표평면 \mathbb{R}^{2} 에서 정의된 잴 수 있는 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

거의 모든 점 x 와 y 에 대하여, f\_{x} 및 f^{y} 는 잴 수 있는 함수이다.

만일 0 \le f \le \infty 이면 등식 \int\_{\mathbb{R}}\int\_{\mathbb{R}}f(x,y) dxdy = \int\_{\mathbb{R}\times \mathbb{R}} f dm\_{2} = \int\_{\mathbb{R}}\int\_{\mathbb{R}}f(x,y) dydx 이 성립한다.

만일 f : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{C} 이고 \int\_{\mathbb{R}}\int\_{\mathbb{R}} |f(x,y)| dxdy < \infty 이면 f \in L^{1}(m\_{2}) 이다. 또한, 거의 모든 x, y 에 대하여 f\_{x}, f^{y} \in L^{1}(m\_{1}) 이고 등식 \int\_{\mathbb{R}}\int\_{\mathbb{R}}f(x,y) dxdy = \int\_{\mathbb{R}\times \mathbb{R}} f dm\_{2} = \int\_{\mathbb{R}}\int\_{\mathbb{R}}f(x,y) dydx 이 성립한다.

(subsection 4.3) 적분가능함수의 곱하기

(정의) 적분가능함수 f,g \in L^{1}(\mathbb{R}) 에 대하여 x \mapsto \int\_{\mathbb{R} f(y)g(x-y) dy 로 정의된 새로운 L^{1}- 함수를 f\*g 라 쓰고, 이를 f 와 g의 곱하기 또는 컨볼류션이라 부른다. \lVert f \* g\rVert\_{1} \le \lvert f\rVert\_{1} \lVert g \rVert\_{1} , f,g \in L^{1}(\mathbb{R}) 이 된다.

(명제 4.3.1) 각 f,g,h \in L^{1}(\mathbb{R}) 와 상수 \alpha, \beta \in \mathbb{C} 에 대하여 다음이 성립한다.

거의 모든 점 x 에 대하여 |(f\*g)\*h|(x) = |f\*(g\*h)|(x) 가 성립한다.

각 x에 대하여 (f\*g)(x) = (g\*f)(x) 이다.

거의 모든 점 x에 대하여 |(\alpha f + \beta g)\*h|(x) = |\alpha(f\*h) + \beta(g\*h)|(x) 가 성립한다.

(정의) 일반적으로, 바나하공간 X에 연산 (x,y) \mapsto xy 가 정의되어 결합법칙 및 분배법칙과 부등식 \lVert xy\rVert \le \lvert x\rVert \lVert y \rVert , x,y \in X 를 만족하면, 이를 바나하대수라 한다. L^{1}(\mathbb{R}) 은 바나하대수이다.

(명제 4.3.2) 만일 함수 g가 미분가능하고 f,g,g’ \in L^{1}(\mathbb{R}) 이면, f\*g 가 미분가능하고 (f\*g)’ = f\*g’ 이 성립한다.

(명제 4.3.3) 두 양수 p,q \in (1,\infty)가 켤레지수라 하자. 그러면 임의의 f\in L^{p}(\mathbb{R}) 과 g \in L^{q}(\mathbb{R}) 에 대하여 f \* g \in C\_{0}(\mathbb{R}) 이다.

(section 5) 푸리에 변환

(subsection 5.1) 푸리에 급수

(정의) 실수군 \mathbb{R} 을 부분군 {2\pi n : n = 0, \mp 1, \mp 2,…} 으로 나눈 몫을 \mathbb{T} 라 두고, 실수축의 거리를 그대로 쓴다. \int\_{\mathbb{T}} f = \frac{1}{2\pi} \int\_{-\pi}^{\pi} f(x)dx 라 정의한다.

(정의) 각 f,g : \mathbb{T} \to \mathbb{C} 와 t \in \mathbb{T} 에 대하여 (f\*g)(t) = \int\_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s) ds 라 정의한다. 그러면 L^{1}(\mathbb{T}) 는 바나하대수가 된다.

(정의) 각 f \in L^{1}(\mathbb{T}) 와 정수 n = 0, \mp 1, \mp 2, … 에 대하여 \hat{f}(n) = \int\_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt 라 정의하면 |\hat{f}(n)| \le \lVert f \rVert\_{1} 이다.

(정의) 각 n = 0, \mp 1, \mp 2, …., 에 대하여 u\_{n}(t) = e^{int} , t\in \mathbb{T} 라 두면 관계식 u\_{n} \* f = \hat{f}(n)u\_{n} , n \in \mathbb{Z}, f \in L^{1}(\mathbb{T}) 이 바로 확인되는데, 특히 (u\_{n} \* f)(0) = \hat{f}(n) 이다. 또한 다음이 성립한다.

\hat{u\_{n}}(m) = \begin{cases}1&m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}

(정의) 무한급수 \sum\_{n = -\infty}^{\infty} \hat{f}(n) u\_{n} 을 f \in L^{1}(\mathbb{T}) 의 푸리에급수라 부르고, 그 계수 {\hat{f}(n) : n \in \mathbb{Z}} 를 f의 푸리에계수라 부른다.

(명제 5.1.1) 각 f, g \in L^{1}(\mathbb{T}) 및 상수 a,b \in \mathbb{C} 와 n \in \mathbb{Z} 에 대하여 등식들 \hat{af + bg}(n) = a\hat{f}(n) + b\hat{g}(n), \hat{f \* g} (n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n) 이 성립한다. 또한, 각 t \in \mathbb{T} 에 대하여 다음 등식 \hat{f\_{t}}(n) = \hat{f}(n) u\_{n}(-t), n \in \mathbb{Z} 이 성립한다.

(명제 5.1.2) 만일 f 가 주기 2\pi 인 미분가능함수고 f’ \in L^{1}(\mathbb{T} 이면 등식 \hat{f’}(n) = in \hat{f}(n), n \in \mathbb{Z} 이 성립한다.

(정리 5.1.3) 각 p \in [1,\infty) 에 대하여, 연속함수공간 C(\mathbb{T}) 는 L^{p}(\mathbb{T})의 조밀한 부분공간이다.

(정의) 집합 \mathbb{T} 에서 정의된 함수 f 와 t \in \mathbb{T} 에 대하여, 그 평행이동을 f\_{t}(s) = f(s-t), s \in \mathbb{T} 라 정의한다.

(정리 5.1.4) 각 함수 f \in L^{p}(\mathbb{T}) 에 대하여 (단, 1 \le p < \infty) 함수 t \mapsto f\_{t} : \mathbb{T} \to L^{p}(\mathbb{T}) 는 고른연속함수이다.

(정리 5.1.5) 함수열 \langle h\_{n} \rangle 이 다음 성질 h\_{n} \ge 0, \int\_{\mathbb{T}} h\_{n} = 1, lim\_{n \to \infty} \int\_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} h\_{n} = 0 (0 < \delta < \pi) 를 만족하면, 임의의 f \in L^{1}(\mathbb{T}) 에 대하여 lim\_{n \to \infty} \lVert f – h\_{n} \* f \rVert\_{1} = 0 이 성립한다.

(정리 5.1.6) 함수열 \langle h\_{n} \rangle 이 성질 h\_{n} \ge 0, \int\_{\mathbb{T}} h\_{n} = 1, lim\_{n \to \infty} \int\_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} h\_{n} = 0 (0 < \delta < \pi) 을 만족하면, 임의의 f \in C(\mathbb{T}) 에 대하여 lim\_{n \to \infty} lim\_{n \to \infty} \lVert f – h\_{n} \* f \rVert\_{\infty} = 0 이 성립한다.

(정의) 각 n = 1, 2, … 에 대하여 K\_{n} = \sum\_{k = -n}^{n} (1-\frac{|k|}{n+1}) u\_{k} 이라 정의했을 때, \langle K\_{n} \rangle 을 페제르 핵이라 한다. 이는 성질 h\_{n} \ge 0, \int\_{\mathbb{T}} h\_{n} = 1, lim\_{n \to \infty} \int\_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} h\_{n} = 0 (0 < \delta < \pi) 을 모두 만족한다.

(정의) {u\_{n} : n \in \mathbb{Z} }의 유한선형결합으로 표시되는 함수를 삼각다항식이라 부르고, 삼각다항식의 벡터공간을 T(\mathbb{T}) 라 쓴다. 삼각다항식 P = \sum\_{n = -N}^{N} a\_{n}u\_{n} 의 푸리에계수 \hat{P} (n) = a\_{n} 으로 주어진다.

(정리 5.1.7) 함수공간 T\_{\mathbb{T}} 는 L^{1}(\mathbb{T})의 조밀한 부분공간이다.

(정리 5.1.8) 만일 f \in L^{1}(\mathbb{T}) 이고 \hat{f} = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

(따름정리 5.1.9) 만일 f \in L^{1}(\mathbb{T}) 이고 \hat{f} \in \mathcal{l}^{1}(\mathbb{Z}) 이면, 거의 모든 점 t \in \mathbb{T} 에서 등식 f(t) = \sum\_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int} 이 성립한다.

(리만-르벡) (정리 5.1.10) 각 f \in L^{1}(\mathbb{T}) 에 대하여 lim\_{n \to \mp \infty} \hat{f} (n) = 0 이 성립한다.

(정의) 정수집합에서 정의된 함수 a : n \mapsto a(n) 가운데 lim\_{n \to \mp \infty} a(n) = 0 인 것 전체의 벡터공간을 c\_{0}(\mathbb{Z}) 라 쓰고, \mathcal{l}^{\infty}(\mathbb{Z}) 의 노음을 그대로 사용한다.

(정리 5.1.11) 변환 f \mapsto \hat{f} 는 바나하대수 L^{1}(\mathbb{T}) 에서 c\_{0}(\mathbb{Z}) 로 가는 노음감소 일대일 선형사상이다.

(정의) 두 함수 a, b \in c\_{0}(\mathbb{Z}) 에 대하여 그 곱 a,b 를 (ab)(n) = a(n)b(n) , n \in \mathbb{Z} 라 정의하면 c\_{0}(\mathbb{Z}) 는 바나하대수가 된다. 따라서 (정리 5.1.11)의 변환은 바나하대수 사이의 정의된 선형사상으로 곱하기를 보존한다. 이를 준동형이라 한다.

(따름정리 5.1.12) 함수공간 T(\mathbb{T}) 는 C(\mathbb{T}) 의 조밀한 공간이다.

(따름정리 5.1.13) 함수공간 T(\mathbb{T}) 는 L^{p}(\mathbb{T}) (단, 1 \le p < \infty)의 조밀한 공간이다.

(바이에르쉬트라스) (정리 5.1.14) 구간 [0,1] 위에서 다항식으로 정의된 함수들의 공간은 C[0,1] 에서 조밀하다.

(subsection 5.2) 푸리에적분

(정의) 임의의 f \in L^{1}(\mathbb{R}) 과 \alpha \in \mathbb{R} 에 대하여 푸리에적분 \hat{f} (\alpha) 를 \hat{f}(\alpha) = \int\_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i \alpha x} dx 과 같이 정의한다. 그러면 |\hat{f} (\alpha )| \le \lVert f \rVert\_{1} , \alpha \in \mathbb{R} 이 성립한다.

(정의) 임의의 f \in L^{1}(\mathbb{R}) 에 대하여 \hat{f} 는 유계연속함수가 되는데, \hat{f} 를 f 의 푸리에변환이라 한다. 각 \alpha \in \mathbb{R} 에 대하여 u\_{\alpha}(x) = e^{i \alpha x} , x \in \mathbb{R} 로 나타내면 등식 u\_{\alpha} \* f = \hat{f} (\alpha) u\_{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} 이 성립한다.

(명제 5.2.1) 각 f, g \in L^{1}(\mathbb{R}) 및 상수 a,b \in \mathbb{C} 와 n \in \mathbb{Z} 에 대하여 등식들 \hat{af + bg}(n) = a\hat{f}(n) + b\hat{g}(n), \hat{f \* g} (n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n) , \alpha \in \mathbb{R} 이 성립한다. 또한, 각 \alpha \in \mathbb{R} 에 대하여 다음 등식 \hat{f u\_{\alpha}} = (\hat{f})\_{\alpha} , \hat{f\_{x}}(\alpha) = \hat{f}(\alpha) u\_{\alpha}(-x), x \in \mathbb{R} 이 성립한다.

(명제 5.2.2) 함수 f \in L^{1}(\mathbb{R}) 에 대하여 다음이 성립한다.

각 x \in \mathbb{R} 에 대하여 g(x) = -ixf(x) 라 정의하였을 때, 만일 g \in L^{1}(\mathbb{R}) 이면 \hat{f} 가 미분가능하고 등식 \hat{f}’ (\alpha) = \hat{g}(\alpha) , \alpha \in \mathbb{R} 이 성립한다.

만일 f 가 미분가능하고 f’ \in L^{1}(\mathbb{R}) 이면 등식 \hat{f’} (\alpha) = i \alpha \hat{f} ( \alpha ), \alpha \in \mathbb{R} 이 성립한다.

(정리 5.2.3) 각 f \in L^{1}(\mathbb{R}) 에 대하여 \hat{f} \in C\_{0}(\mathbb{R}) 이다.

(정리 5.2.4) 함수모임 { h\_{\lambda} : \lambda \in (0, \infty) } 이 다음 성질 h\_{\lambda} \ge 0, \int\_{\mathbb{R}} h\_{\lambda} = 1, lim\_{\lambda \to \infty} \int\_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} h\_{\lambda} = 0 (0 < \delta ) 를 만족하면 다음이 성립한다.

임의의 f \in L^{1} (\mathbb{R}) 에 대하여 lim\_{\lambda \to \infty} \lVert f – h\_{\lambda} \* f \rVert\_{1} = 0 이 성립한다.

임의의 유계 고른연속함수 f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} 에 대하여 lim\_{\lambda \to \infty} \lVert f – h\_{\lambda} \* f \rVert\_{\infty} = 0 이 성립한다.

(명제) 함수 h : \mathbb{R} \to \mathbb{C} 가 다음 두 조건 h \ge 0 , \int\_{\mathbb{R}} h = 1 을 만족할 때, h\_{\lambda} (x) = \lambda h(\lambda x), x \in \mathbb{R}, \lambda > 0 이라 두면 {h\_{\lambda} : \lambda > 0} 가 성질들 h\_{\lambda} \ge 0, \int\_{\mathbb{R}} h\_{\lambda} = 1, lim\_{\lambda \to \infty} \int\_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} h\_{\lambda} = 0 (0 < \delta ) 를 만족한다. 두 조건을 만족시키는 함수 h가 h(x) = \frac{1}{2\pi} \int\_{\mathbb{R}} p(\alpha)u\_{\alpha}(x) d\alpha 일 때 매우 유용하게 쓰인다.

(정의) H(x) = \frac{1}{2\pi} \int\_{\mathbb{R}} e^{-|\alpha|} e^{i \alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^{2}} 라 두면 위 명제의 조건을 충족하며, H\_{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int\_{\mathbb{R}} e^{-|\alpha/\lambda|} e^{i \alpha x} d\alpha = \frac{1}{2 \pi} \frac {2\lambda}{1+\lambda^{2} x^{2}} 이 되는데, {H\_{\lambda} : \lambda > 0 } 을 뽀아송 핵이라 부른다.

(정의) 실수 \mathbb{R} 에서 정의된 함수 f \in C\_{c}(\mathbb{R}) 가운데 n 번 미분가능하고 n계 도함수 f^(n) 이 연속인 함수들의 모임을 C\_{c}^{n}(\mathbb{R}) 이라 쓰고, C\_{c}^{\infty} (\mathbb{R}) = \bigcup\_{n=1}^{\infty} C\_{c}^{n}(\mathbb{R}) 이라 두면 이는 벡터공간이 된다.

(명제 5.2.5) 함수공간 C\_{c}^{\infty} (\mathbb{R}) 는 노음공간 L^{1}(\mathbb{R}) 이나 C\_{0} (\mathbb{R}) 에서 조밀한 부분공간이다.

(역변환공식) (정리 5.2.6) 만일 f \in L^{1}(\mathbb{R}) 이고 \hat{f} \in L^{1}(\mathbb{R}) 이면, 등식 f(x) = \frac{1}{2 \pi} \int\_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i \alpha x} d\alpha 이 거의 모든 점 x 에서 성립한다.

f가 연속함수이면 등식은 모든 x \in \mathbb{R} 에 대하여 성립한다.

(정리 5.2.7) 만일 f \in L^{1}{\mathbb{R}} 이고 \hat{f} = 0 이면 거의 모든 점에서 f = 0 이다.

(정의) 각 \lambda > 0 에 대하여 K\_{\lambda} (x) = \frac{1}{2 \pi} \int\_{\mathbb{R}} \max{1- \frac{|\alpha|}{\lambda}, 0} u\_{\alpha}(x) d\alpha = \frac{1}{2 \pi} \int\_{\mathbb{R}} \biggl( 1- \frac{|\alpha|}{\lambda} \biggr) e^{i \alpha x} d\alpha 라 두면 함수모임 {K\_{\lambda} : \lambda > 0} 을 페제르 핵이라 부른다.

(정의) G(x) = \frac{1}{2 \pi} \int\_{\mathbb{R}} e^{-\alpha^{2}/2}u\_{\alpha}(x) d\alpha 라 두자. 이로부터 얻어지는 함수모임 {G\_{\lambda} : \lambda > 0} 을 가우스 핵이라 부른다.

(명제) g 와 \hat{g} 가 L^{1}-연속함수일 때 등식 g(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{g}}(-x) , x \in \mathbb{R} 이 성립함을 말한다.

(명제) \hat{K\_{\lambda}} (\alpha) = \max{1- \frac{|\alpha|}{\lambda}, 0}, \hat{P\_{\lambda}} (\alpha) = e^{-|\alpha/\lambda|}, \hat{G\_{\lambda}} (\alpha) = e^{-\alpha^{2}/2\lambda^{2}}

(정리 5.2.8) 푸리에 변환 f \mapsto \hat{f} 는 바나하공간 L^{1}(\mathbb{R}) 에서 C\_{0} (\mathbb{R}) 로 가는 일대일 노음감소 중동형이고 그 치역이 조밀하다. 단 C\_{0}(\mathbb{R})의 곱하기는 점별곱하기 (fg)(x) = f(x)g(x) 로 주어진다.

(정의) 르벡적분가능함수 f \in L^{1}(\mathbb{R}) 이 주어지면, 급수 F(t) = \sum\_{n = -\infty}^{\infty} f(t-2n \pi) 가 거의 모든 점 t \in \mathbb{T} 에서 절대수렴하고 F \in L^{\mathbb{T}} 가 된다. F의 푸리에 급수가 t \in \mathbb{T} 에서 점별수렴한다면 등식 \sum\_{n = -\infty}^{\infty} f(t – 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum\_{n = -\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} 를 얻는데, 이는 푸리에급수와 푸리에 적분의 관계를 보여주며 를 뽀아송 등식이라 한다.

(section 6) 노음공간

(subsection 6.1) 쌍대공간

(정의) 두 노음공간 사이에 정의된 선형사상 T : X \to Y 에 대하여 \lVert T\rVert = sup{\lVert T(x) \rVert : x \in X, \lVert x \rVert \le 1} 이라 정의하자. 만일 \lVert T\rVert < \infty 이면 T 를 유계선형사상이라 부르고 \lVert T\rVert 를 T의 노음이라 한다.

선형사상 T : X \to Y 의 노음이란 X의 단위공 {x \in X : \lVert x \rVert \le 1} 의 치역이 Y에서 얼마나 늘어나는가 재는 것이다.

(명제 6.1.1) 노음공간 사이의 선형사상 T : X \to Y 에 대하여 다음은 동치이다.

T가 유계사상이다

T가 연속이다.

T가 한 점 x\_{0} \in X 에서 연속이다.

(명제 6.1.2.2) 임의의 노음공간 X 에서 Y 로 가는 유계선형사상 전체의 집합 B(X,Y) 는 노음공간이 된다. 만일 Y가 바나하공간이라면 B(X,Y) 도 바나하공간이다.

(정의) 그 치역이 스칼라 \mathbb{C} 인 선형사상을 선형범함수라 하고, X에서 정의된 유계선형범함수 전체의 노음공간을 X^{\*} 라 표시한다. 즉, X\* = B(X,\mathbb{C}) 이다. X\* 은 항상 바나하공간이 되는데, X^{\*}를 X의 쌍대공간이라 한다.

(정의) 양측도 (X, \mu) 가 주어지면 임의의 q \in [1,\infty]에 대하여 g \mapsto \phi\_{g} : L^{q} (\mu) \to L^{p}(\mu)^{\*} 가 선형사상임이 바로 확인되는데, 이 사상이 노음을 보존한다는 것을 보였다. (단,p = 1, q = \infty 인 경우 (X, \mu) 가 \sigma-유한이라 가정한다) 이렇게 노음을 보존하는 선형사상을 등거리사상이라 부른다.

등거리사상은 단사사상이다.

(정리 6.1.3) 만일 1 \le p < \infty 이면 g \mapsto \phi\_{g} : \mathcal{l}^{q} \to (\mathcal{l}^{p})^{\*} 은 전단사 등거리사상이다. (단, p,q 는 켤레지수)

(한-바나하)(정리 6.1.4) 노음공간 X와 그 부분공간 Y가 주어져있다. 그러면 임의의 \psi \in Y^{\*} 에 대하여 다음 성질 \phi |\_{Y} = \psi, \lVert \phi \rVert = \lVert \psi \rVert 을 만족하는 \phi \in X^{\*} 가 존재한다.

(따름정리 6.1.5) 노음공간 X의 점 x 가 x \neq 0 이면 \phi(x) = \lVert x \rVert 이고 \lVert \phi \rVert 인 \phi \in X^{\*} 가 존재한다.

따라서, 노음공간 X는 항상 X^{\*\*} 의 부분공간이다.

(정의) 만일 x \mapsto T\_{x} : X \to X^{\*\*} 가 전사사상이면 X를 반사공간이라 부른다.

그 예로 바나하공간 \mathcal{l}^{p} (1 < p < \infty) 는 반사공간이다.

부분집합 Y 의 닫힘은 \bar{Y}로 표시한다.

(따름정리 6.1.6) 노음공간 X의 부분공간 Y와 한 점 x \in X 에 대하여 다음은 동치이다.

x \in \bar{Y} 이다.

\phi \in X^{\*} 이고 \phi |\_{Y} = 0 이면 \phi (x) = 0 이다.

(subsection 6.2) 바나하공간의 선형사상

(정의)거리공간 (X,d) 의 점 x \in X 와 양수 r > 0 에 대하여 x 의 근방을 N\_{X} (x,r) = {y \in X : d(x,y) < r} 로 정의하고, N(x,r)로 쓴다. X가 노음공간일 때 0 의 근방 N\_{X}(0,r) 은 X\_{r} 이라 쓴다.

(베르) (정리 6.2.1) 완비거리공간 X의 닫힌집합열 \langle C\_{n} \rangle 의 합집합이 전체공간이 되면, 그 중 한 닫힌 집합은 열린집합을 품는다.

(따름정리 6.2.2) 완비거리공간의 조밀 열린집합열의 교집합은 비어있지 않다.

(열린사상정리)(정리 6.2.3) 바나하공간 사이에 정의된 유계선형사상 T : X \to Y 가 전사사상이라 하자. 그러면 T(X\_{1}) \supset Y\_{delta} 인 양수 \delta >0 가 존재한다.

(따름정리 6.2.4) 바나하공간 사이에 정의된 전사 유계선형사상 T : X \to Y 는 항상 열린사상이다.

(따름정리 6.2.5) 바나하공간 사이에 정의된 유계선형사상 T : X \to Y 가 전단사사상이면 그 역사상 T^{-1} : Y \to X 도 유계사상이다.

(정의) 각 n = 1,2, … 에 대하여 D\_{n}(T) = \sum\_{k = -n}^{n} u\_{k}(t) = \frac{sin(n+\frac{1}{2}) t}{sin \frac{1}{2} t} , t \in \mathbb{T} 라 정의하자. 함수열 \langle D\_{n} \rangle 은 디리끌렛 핵이라 불린다.

(명제) 주기함수의 푸리에 변환 L^{1}(\mathbb{T}) \to c\_{0}(\mathbb{Z}) 이 전사사상이 아니다.

(닫힌그래프정리)(정리 6.2.6) 바나하공간 사이의 선형사상 T : X \to Y 가 조건 x\_{n} \in X, lim\_{n \to \infty} x\_{n} = x, lim\_{n \to \infty} T(x\_{n}) = y \implies T(x) = y 를 만족하면 T는 유계선형사상이다.

(고른유계원칙) (바나하-쉬타인하우스 정리) (정리 6.2.7) 바나하공간 X 에서 노음공간 Y 로 가는 유계선형사상들의 모임 {T\_{\alpha} : \alpha \in A} 가 주어져있다. 만일 각 x \in X 에 대하여 M(x) = \sup{\lVert T\_{\alpha} (x) \rVert: \alpha \in A} < \infty 이면 \sup{\lVert T\_{\alpha} \rVert: \alpha \in A} < \infty 이다.

(따름정리 6.2.8) 바나하공간 X에서 노음공간 Y로 가는 유계선형사상열 \langle T\_{n} \rangle 이 있는데, 각 x \in X 에 대하여 Y 의 수열 \langle T\_{n} (x) \rangle 이 수렴한다고 가정하자. 이 때, T(x) = \lim\_{n \to \infty} T\_{n} (x) 라 두면 T : X \to Y 는 유계선형사상이다.

(명제) 푸리에 급수가 점별수렴하지 않는 연속함수가 존재한다.

(subsection 6.3) 힐버트공간

복소벡터공간 X가 있을 때, 함수 (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle : X \times X \to \mathbb{C} 가 다음 성질들을 만족하면 이를 내적이라 하고, 내적이 정의되어있는 벡터공간을 내적공간이라 한다.

각 y \in Y 에 대하여 x \mapsto \langle x,y \rangle : X \to \mathbb{C} 가 선형범함수이다.

각 x, y \in X 에 대하여 \langle x,y \rangle = \bar{\langle y,x \rangle}

각 x \in X 에 대하여 \langle x,x \rangle \ge 0 이다.

x = 0 \iff \langle x,x \rangle = 0 이다.

(정의) 부등식 | \langle x,y \rangle |^{2} \le \langle x,x \rangle \langle x,y \rangle , x, y \in X 를 얻는데, 이를 쉬바르츠 부등식이라 한다.

(명제) 각 x \in X 에 대하여 \lVert x \rVert = \langle x,x \rangle^{1/2} 라 정의하면 x \mapsto \lVert x \rVert 가 노음이 된다. 따라서 임의의 내적공간은 노음공간이 된다.

(정의) 완비내적공간을 힐버트 공간이라 한다.

(정의) 내적공간의 노음은 등식 \lVert x+y \rVert^{2} + \lVert x-y \rVert^{2} = 2 \lVert x \rVert^{2} + 2 \lVert y \rVert^{2} 을 만족하는데, 이를 나란히꼴 등식이라 부른다.

(명제) 임의의 y \in H 에 대하여 \phi\_{y} : X \mapsto \langle x,y \rangle , x \in H 는 유계선형범함수이고, \lVert \phi\_{y} \rVert = \lVert y \rVert 이다. 따라서 y \mapsto \phi\_{y} : X \to X^{\*} 는 등거리 단사사상이다. 선형사상은 아니다. (정리 6.3.3) 에 의해 전사사상이다.

(정의) 각 \alpha \in \mathbb{C} 에 대하여 \phi\_{\alpha y} = \bar{\alpha} \phi\_{y} 가 되는 사상을 켤레선형사상이라 부른다.

(정리 6.3.1) 힐버트 공간 H의 닫힌볼록집합 C 와 x\_{0} \in H \setminus C 에 대하여 d = inf{\lVert x\_{0} – y \rVert : y \in C} 라 두면 \lVert x\_{0} – y\_{0} \rVert = d 인 y\_{0} \in C 가 유일하게 존재한다.

(정의) 내적공간의 두 벡터 x,y 가 \langle x, y \rangle = 0 일 때, x 와 y가 서로 수직이라고 하고 x \perp y 라 쓴다. 부분집합 E의 임의의 벡터와 수직인 벡터를 모두 모은 집합을 E^{\perp} 라 표시한다.

(따름정리 6.3.2) 힐버트공간 H의 부분공간 E가 닫힌 진부분공간이라면 E^{\perp} \supsetneqq {0} 이다.

(정리 6.3.3) 힐버트공간 H 에서 임의의 y \in H 에 대하여 \phi\_{y} : X \mapsto \langle x,y \rangle , x \in H, y \mapsto \phi\_{y} : X \to X^{\*} 에 의해 정의된 사상 y \mapsto \phi\_{y} 는 전단사 등거리 켤레선형사상이다.

(정의) 내적공간 H의 부분집합 {u\_{\alpha} : \alpha \in A} 가 다음 조건을 만족할 때, 이를 정규직교집합이라 부르고, 이에 의하여 생성된 H의 부분공간을 P\_{A} 라 쓰자.

\langle u\_{\alpha} , u\_{\beta} \rangle = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}

(명제 6.3.4) 내적공간 H의 정규직교집합 {u\_{\alpha} : \alpha \in A} 의 유한부분집합 {u\_{\alpha} : \alpha \in F} 가 주어져 있다. 이 때, 임의의 고정된 x \in H 에 대하여 부등식 \bigg\| x - \sum\_{\alpha \in F} \langle x, u\_{\alpha} \rangle u\_{\alpha} \bigg\| \le \| x – y \| , y \in P\_{F} 이 성립하고, y = \sum\_{\alpha \in F} \langle x, u\_{\alpha} \rangle u\_{\alpha} 일 때에 한하여 등호가 성립한다.

또한, 각 x \in H 에 대하여 부등식 \sum\_{\alpha \in F} | \langle x, u\_{\alpha} \rangle |^{2} \le \| x \|^{2} 이 성립한다.

(베셀 부등식) (따름정리 6.3.5) 내적공간 H에 주어진 임의의 정규직교집합 {u\_{\alpha} : \alpha \in A } 에 대하여, 부등식 \sum\_{\alpha \in A} | \langle x, u\_{\alpha} \rangle |^{2} \le \| x \|^{2}, x \in H 이 성립한다.

(정리 6.3.6) 힐버트공간 H 의 정규직교집합 \mathfrak{U} = {u\_{\alpha} : \alpha \in A } 에 대하여 다음은 동치이다.

각 x \in H 에 대하여 등식 \sum\_{\alpha \in A} | \langle x, u\_{\alpha} \rangle |^{2} = \| x \|^{2} 이 성립한다.

각 x, y \in H 에 대하여 등식 \sum\_{\alpha \in A} \langle x, u\_{\alpha} \rangle \bar{\langle y, u\_{\alpha} \rangle} = \langle x,y \rangle 이 성립한다.

만일 \mathfrak{V} \supset \mathfrak{U} 인 정규직교집합 \mathfrak{V} 이 있으면 \mathfrak{V} = \mathfrak{U} 이다.

벡터공간 P\_{A} 가 H 안에서 조밀하다.

(정의) \sum\_{\alpha \in A} \langle x, u\_{\alpha} \rangle \bar{\langle y, u\_{\alpha} \rangle} = \langle x,y \rangle 는 파시발 등식이라 불린다.

(정의) (정리 6.3.6) 에 있는 조건들을 만족하는 정규직교집합 {u\_{\alpha} : \alpha \in A } 을 힐버트공간 H 의 정규직교기저라 한다.

(정의) 힐버트공간 사이에 정의되어 내적을 보존하는 선형사상을 힐버트공간 동형사상이라 부른다.

(정리 6.3.7) 힐버트공간 H의 정규직교기저 {u\_{\alpha} : \alpha \in A } 에 대하여 \{Phi} :x \mapsto \hat{x} : H \to \mathcal{l}^{2} (A) 는 전단사 힐버트공간 동형사상이다.

(명제) u\_{n}(t) = e^{int} 로 정의한 {u\_{n} : n \in \mathbb{Z}} 는 L^{2}(\mathbb{T}) 의 정규직교기저가 된다.

등식 \sum\_{n= -\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \bar{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2 \pi} \int\_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{g(t)} dt, f, g \in L^{2}(\mathbb{T}) 도 역시 파시발 등식이라 부른다.

등식 \lim\_{n \to \infty} \bigg\| f - \sum\_{k = -n}^{ n} \hat{f}(k) u\_{k}\ bigg\|\_{2} = 0, f \in L^{2}(\mathbb{T})

실수축 \mathbb{R} 의 원래 르벡측도에 \frac{1}{2 \pi} 한 측도공간을 \hat{\mathbb{R}} 이라 쓰자. 그러면 등식 \Int\_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2} dx = \Int\_{\mathbb{\hat{R}}} |\hat{f}(\alpha)|^{2} d\alpha, f \in C\_{c}(\mathbb{R}) 이 성립한다. 역변환공식은 물론 f(x) = \Int\_{\mathbb{\hat{R}}} \hat{f}(\alpha) e^{i \alpha x} d\alpha 로 표현된다.

(명제) 함수공간 C\_{c}(\mathbb{R}) 을 L^{2} (\mathbb{R}) 의 부분공간으로 생각하면, 등거리 선형사상 f \mapsto \hat{f} : C\_{c} (\mathbb{R}) \to L^{2} (\hat{\mathbb{R}}) 을 얻게 된다. 그런데 C\_{c}(\mathbb{R}) 이 L^{2} (\mathbb{R}) 안에서 조밀하므로 이 사상을 L^{2}(\mathbb{R}) 에 확장하여 등거리 선형사상 \mathcal{F} : L^{2}(\mathbb{R}) \to L^{2}(\hat{\mathbb{R}}) 을 얻을 수 있다. 만일 f \L^{1}(\mathbb{R}) \cap L^{2}(\mathbb{R}) 이면 두 사상이 동시에 정의되며, \hat{f} = \mathcal{F} (f) 이다.

(정의) 위 명제에서 정의된 \mathcal{F} : L^{2}(\mathbb{R}) \to L^{2}(\hat{\mathbb{R}}) 는 전단사 등거리사상이며 이를 플랑셰를 변환이라 한다.

(정리 6.3.8) 각 f \in L^{1}(\mathbb{R}) \cap L^{2}(\mathbb{R}) 에 대하여 \hat{f} = \mathcal{F} (f) 를 만족하는 힐버트공간 동형사상 \mathcal{F} : L^{2}(\mathbb{R}) \to L^{2}(\hat{\mathbb{R}}) 이 유일하게 존재한다.

(정의) 플랑셰를 변환이 힐버트공간 동형사상이란 말을 수식으로 쓰면 \Int\_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi} \Int\_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha)\bar{\hat{g}(\alpha)} d\alpha 가 되는데, 이 역시 파시발 등식이라 불린다.

(Section 7) 복소측도

(subsection 7.1) 부호측도와 복소측도

(정의) 만일 함수 \lambda : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^{\*} 가 다음 성질을 만족하고 \mu(\empty) = 0 이면, 이를 부호가 붙은 측도라 한다.

{A\_{n} \in \mathfrak{S} : n = 1,2, …} 가 서로소 \implies \lambda \biggl \bigsqcup\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \sum\_{n = 1}^{\infty} \lambda (A\_{n})

(정의) 만일 함수 \lambda : \mathfrak{S} \to \mathbb{C}가 다음 성질을 만족하고 \mu(\empty) = 0 이면, 이를 복소측도라 한다.

{A\_{n} \in \mathfrak{S} : n = 1,2, …} 가 서로소 \implies \lambda \biggl \bigsqcup\_{n=1}^{\infty} A\_{n} \biggr = \sum\_{n = 1}^{\infty} \lambda (A\_{n})

(명제) 복소측도의 합과 스칼라곱은 다시 복소측도가 된다.

(정의) 복소측도 \lambda : \mathfrak{S} \to \mathbb{C} 가 주어졌을 떄, 각 E \in \mathfrak{S} 에 대하여 \lambda\_{1} (E) 와 \lambda\_{2} (E) 를 각각 \lambda (E) \in \mathbb{C}의 실수부분과 허수부분으로 정의하면, \lambda\_{1} 와 \lambda\_{2} 는 부호측도가 되고 \lambda = \lambda\_{1} + i \lambda\_{2} 이다.

(정의) 집합 X의 \sigma -대수 \mathfrak{S} 에 부호측도 \lambda 가 정의되어 있을 때, 집합 P \in \mathfrak{S} 가 성질 E \in \mathfrak{S} , E \subset P \implies \lambda (E) \ge 0 을 만족하면 이를 양집합이라 부르고, 성질 E \in \mathfrak{S} , E \subset P \implies \lambda (E) \le 0 을 만족하면 이를 음집합이라 정의한다.

(명제) 양집합의 부분집합은 항상 양집합이다. 만일 {P\_{n} : n = 1,2, …} 이 양집합들의 모임이면 그 합집합 P 도 양집합이다.

(한 분해정리) (정리 7.1.1) 만일 \sigma -대수 (X,\mathfrak{S}) 에 부호측도 \lambda 가 주어지면 X 는 양집합과 음집합으로 분할된다. 만일 두 가지 분할 (P\_{1}, Q\_{1}) 과 (P\_{2}, Q\_{2}) 가 있으면, 임의의 E \in \mathfrak{S} 에 대하여 \lambda(E \cap P\_{1}) = \lambda(E \cap P\_{2}), \lambda(E \cap Q\_{1}) = \lambda(E \cap Q\_{2}) 가 성립한다.

(정의) 이제, 부호측도 \lambda 에 의하여 X 를 양집합 P 와 음집합 Q 로 분할하였을 때, 각 E \in \mathfrak{S} 에 대하여 \lambda\_{+}(E) = \lambda(E \cap P), \lambda\_{-}(E) = -\lambda(E \cap Q) 라 정의할 수 있다. 그러면 \lambda\_{+}(E) 와 \lambda\_{-}(E) 는 양측도가 되고 \lambda (E) = \lambda\_{+}(E) - \lambda\_{-}(E), E \in \mathfrak{S} 가 된다.

또한, 각 E \in \mathfrak{S} 에 대하여 | \lambda |(E) = \lambda\_{+}(E) + \lambda\_{-}(E)라 정의하면 | \lambda | 도 양측도이다.

(명제 7.1.2) 집합 X의 \sigma -대수 \mathfrak{S} 에서 정의된 부호측도 \lambda가 주어지면, 각 E \in \mathfrak{S} 에 대하여 | \lambda |(E) = \sup \biggl{ \sum\_{n = 1}^{\infty} | \lambda (E\_{n}) | : E\_{n} \in \mathfrak{S} , E \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n}\biggr} 이 성립한다.

(정의) \lambda 가 \sigma -대수 (X, \mathfrak{S}) 의 복소측도일 때 | \lambda |(E) = \sup \biggl{ \sum\_{n = 1}^{\infty} | \lambda (E\_{n}) | : E\_{n} \in \mathfrak{S} , E \bigsqcup\_{n = 1}^{\infty} E\_{n}\biggr}

(정의) 집합 X의 \sigma -대수 \mathfrak{S} 에서 정의된 복소측도 \lambda 가 주어져 있을 때, E \mapsto |\lambda|(E) 는 양측도가 된다.

(정의) 복소측도 \lambda 를 \lambda = (\lambda\_{1+} - \lambda\_{1-}) + i ( \lambda\_{2+} - \lambda\_{2-} ) 와 같이 양측도의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 임의의 E \in \mathfrak{S} 에 대하여 | \lambda | (E) < \infty 이며 특히 | \lambda | (X) < \infty 인데, \lVert \lambda \rVert = | \lambda | (X) 라 정의한다. 전체측도 \mu(X) 값이 유한인 양측도를 유한 양측도라 정의하는데, 유한 양측도는 복소측도이나 양측도는 복소측도가 아니다.

(subsection 7.2) 라돈-니코딤 정리와 르벡 분해정리

(정의) 집합 X 위의 \sigma -대수 \mathfrak{S} 위의 양측도 \mu 와 부호측도 혹은 복소측도 \lambda 가 성질 E \in \mathfrak(S), \mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0 를 만족하면 \lambda 를 \mu 에 대한 절대연속측도라 하고 \lambda \ll \mu 라 쓴다.

또한 성질 \lambda (E) = \lambda (A \cap E) , \mu (E) = \mu (B \cap E) , E \in \mathfrak{S} 를 만족하는 서로소인 A, B \in \mathfrak{S} 가 있으면 \lambda 를 \mu 에 대한 특이측도라 말하며, 이 때 \lambda \perp \mu 라 쓴다.

(명제) 실수축 위에서 \lambda = \lambda\_{1} + i \lambda\_{2} 와 같이 정의된 측도는 르벡측도에 대하여 절대연속이다. 디락측도는 르벡측도에 대한 특이측도이다.